Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

73. Постройте конечную сигнатуру Ω и бесконечную Ω-алгебру, не имеющую собственных подалгебр.

74. *Унар* — это алгебра с единственной одноместной операцией. Постройте конечный унар, содержащий более 1 элемента и не имеющий собственных подалгебр.

75. Докажите, что любой бесконечный унар имеет бесконечно много собственных подалгебр.

76. Существует ли конечная полугруппа, содержащая более 1 элемента и не имеющая собственных подалгебр?

77. Существует ли унар, который вкладывается в любой конечный унар?

78. Докажите, что в подалгебре (**N**,+) все элементы, кроме конечного числа, образуют арифметическую прогрессию.

79. *Рангом* подалгебры называется наименьшая мощность множества образующих.

а) Постройте подалгебру (**N**,+) ранга 2.

б) Постройте подалгебру (**N**,+) произвольного конечного ранга.

80. Докажите, что всякая подалгебра (**N**,+) конечно порождена.

81. *Мономорфизм* — это морфизм $f\colon A \to B$, такой что для любых морфизмов $g,h\colon C \to A$, если $fg = fh$, то $g = h$. Докажите, что всякое вложение Ω-алгебр — мономорфизм.

82. *Эпиморфизм* — это морфизм $f\colon A \to B$, такой что для любых морфизмов $g,h\colon B \to C$, если $gf = hf$, то $g = h$. Докажите, что всякое наложение Ω-алгебр — эпиморфизм.

83. а) Докажите, что если G — группа, H — ее нормальная подгруппа, то отношение

$xH = yH$ — конгруэнция в G.

б) Докажите, что всякая конгруэнция в G имеет вид $xH = yH$ для некоторой нормальной подгруппы H.

84. Докажите, что если G — группа, H — ее ненормальная подгруппа, то отношение $xH = yH$ — не конгруэнция в G.

85. Рассмотрим полугруппу (**N**,+).

а) Верно ли, что $x+H = y+H$ — конгруэнция для любой подполугруппы H?

b) Существуют ли еще какие-нибудь конгруэнции?

86. Опишите все гомоморфные образы унара (**N**,S), где S — сдвиг на 1 вправо (*теорема Дедекинда*).

87. Опишите все конгруэнции в (**N**,S).

88. Постройте конечные алгебры A, B, которые не вкладываются в $A \times B$. (Указание: можно рассмотреть унары).

89. Постройте коммутативные полугруппы A, B, которые не вкладываются в $A \times B$. (Указание: можно использовать рациональные числа).

90. а) Докажите, что всякая конечная полугруппа содержит хотя бы один идемпотент
(т. е. элемент равный своему квадрату).

б) Выведите отсюда, что если A, B - полугруппы, и A конечна, то B вкладывается в $A \times B$.

91. Постройте конечные неизоморфные алгебры A, B, такие что $A \times A$ и $A \times B$ изоморфны. (Указание: можно рассмотреть унары).

92. Докажите, что произведение конечно порожденных моноидов — конечно порожденный моноид.

93. Верно ли, что произведение конечно порожденных Ω-алгебр — конечно порожденная алгебра?

94. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте

а) вложение $T_\Omega(Y)$ в $T_\Omega(X)$.

б) гомоморфизм $T_\Omega(X)$ на $T_\Omega(Y)$.

95. Сколько автоморфизмов имеет алгебра $T_\Omega(X)$ при $|X| = n$?

96. Найдите полугруппу эндоморфизмов свободного циклического унара.

97. Рассмотрим конечные деревья конечных двоичных последовательностей: дерево — это множество последовательностей, содержащее вместе с каждой последовательностью все ее начальные отрезки (в том числе, пустой λ). На деревьях определим операцию «прививки»: $T + S := \{0x \mid x \in T\} \cup \{1x \mid x \in S\} \cup \{\lambda\}$.

Докажите, что полученная алгебра изоморфна $T_\Omega(X)$ для сигнатуры Ω с единственной бинарной операцией и $|X|=1$.

98. Найдите аналог предыдущей задачи для сигнатуры с двумя бинарными операциями и $|X|=2$.

99. (a) Рассмотрим конечную сигнатуру Ω, не содержащую констант. Докажите, что если X, Y конечны и $T_\Omega(X) \cong T_\Omega(Y)$, то $|X|=|Y|$.

(b) Докажите аналогичное утверждение для сигнатуры с константами и конечным непустым множеством функциональных символов.

100. Докажите, что всякая подалгебра алгебры $T_\Omega(X)$ изоморфна алгебре $T_\Omega(Y)$ для некоторого Y.

101. Пусть Ω - сигнатура с единственной бинарной операцией. Существует ли вложение $T_\Omega(X)$ в $T_\Omega(Y)$, если $|X|=2$, $|Y|=1$?

102. Докажите, что $(\mathbf{N}, +, 0)$ - свободный циклический моноид.

103. Докажите, что $(\mathbf{N}^k, +, 0)$ - свободный коммутативный моноид ранга k (если $k>0$, натуральное).

104. Как построить свободный коммутативный моноид над произвольным множеством X?

105. а) Как из свободного моноида получить свободную полугруппу?

b) Как из свободного коммутативного моноида получить свободную полугруппу?

106. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте

а) вложение $F_{\Sigma}(Y)$ в $F_{\Sigma}(X)$.

б) гомоморфизм $F_{\Sigma}(X)$ на $F_{\Sigma}(Y)$.

107. Докажите, что любой свободный моноид конечного ранга вкладывается в свободный моноид ранга 2.

108. Докажите, что свободный коммутативный моноид ранга 3 не вкладывается в свободный коммутативный моноид ранга 2.

109. Докажите, что многообразие коммутативных идемпотентных моноидов локально финитно (т. е. порождается конечными алгебрами).