Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 6

Пределы (продолжение)

<u>Определение</u> Категория называется *полной*, если в ней всякая диаграмма имеет предел; *конечно полной*, если в ней всякая конечная диаграмма (т.е. диаграмма с конечной схемой) имеет предел.

Категория - *с произведениями*, если в ней существуют произведения любых семейств объектов; *с конечными произведениями*, если в ней существуют произведения любых конечных семейств объектов.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

Категория - *с уравнителями*, если в ней существуют уравнители для всех диаграмм вида

<u>Теорема 6.1</u> Всякая категория с произведениями и уравнителями полна; аналогично, всякая категория с конечными произведениями и уравнителями конечно полна.

Двойственные понятия: кополнота, категория с копроизведениями, категория с коуравнителями.

<u>Теорема 6.1°</u> Всякая категория с [конечными] копроизведениями и коуравнителями [конечно] полна.

(= теореме 6.1 для двойственной категории).

Для доказательства теоремы 6.1 для каждой диаграммы **D:** $\mathscr{J} \to \mathscr{C}$ построим объекты

$$P := \prod_{j \in J} D_j \ , \ Q := \prod_{\alpha \in Mor(J)} D_{конец(\alpha)} \ .$$

вместе с проекциями

$$p_j : P \to D_j, \ \pi_\alpha : X \to D_{конец(\alpha)}.$$

Затем построим

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & Q \end{tikzcd}$$

где $\varphi := <\varphi_\alpha>_{\alpha \in Mor\mathscr{J}}$, $\psi := <\psi_\alpha>_{\alpha \in Mor\mathscr{J}}$,

$$\varphi_\alpha := p_{конец(\alpha)}, \ \psi_\alpha := p_{начало(\alpha)} \cdot D_\alpha \, .$$

Тогда, если $e: E \to P$ – уравнитель пары φ, ψ, то получаем предел для **D:**

$(E, (e \cdot p)_{j \in \mathscr{J}})$.

Дальнейшие примеры пределов и копределов

Пример 8 Пусть $(X, \le)$ - частично упорядоченное множество (ЧУМ), ему соответствует категория $\mathcal{C}$ = CPO$(X, \le)$ (см. лекцию 2).

В этой категории конус над семейством объектов $(x_j)_{j\in J}$ – это их миноранта, т.е.

такое y, что $y \le x_j$ для всех j (с формальной точки зрения, это не конус, а его вершина; конус получится, если добавим единственные стрелки (y, x_j)).

Произведение данного семейства в $\mathcal{C}$ - это его наибольшая миноранта, т.е. inf.

Двойственное понятие – sup; это наименьшая мажоранта. Она является суммой данного семейства объектов в $\mathcal{C}$.

Определение *Нижняя полурешетка* – это ЧУМ, в котором существует inf для любой пары (а значит, и для любого непустого конечного семейства) элементов.

Верхняя полурешетка – это ЧУМ, в котором существует sup для любой пары (а значит, и для любого непустого конечного семейства) элементов.

Решетка – это одновременно нижняя и верхняя полурешетка.

Заметим, что $\inf \varnothing$ - это наибольший элемент X (т.е. финальный объект $\mathcal{C}$); $\sup \varnothing$ - наименьший элемент X.

Предложение 6.2 Если в ЧУМ $(X,\le)$ любое подмножество имеет sup, то любое подмножество имеет inf.

В таком случае $(X,\le)$ называется *полной решеткой.*

Пример 9 Диаграмма со схемой CPO$(\mathbf{N}, \ge)$ задается последовательностью стрелок $d_n: D_{n+1} \to D_n$; остальные стрелки восстанавливаются по композиции. Предел такой диаграммы – это обычный обратный (проективный) предел последовательности. В частности, кольцо целых p-адических чисел $\mathbf{Z}_p$ получается как обратный предел колец $\mathbf{Z}/(p^n)$ (d_n: $\mathbf{Z}/(p^{n+1}) \to \mathbf{Z}/(p^n)$ – это факторизация по главному идеалу, порожденному p).

Пример 10 Аналогично, предел диаграммы со схемой CPO$(\mathbf{N}, \le)$ - это прямой (индуктивный) предел последовательности $d_n: D_n \to D_{n+1}$.

Пример 11 Копредел диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

называется *амальгамой* (или *амальгамированной суммой*). Такая конструкция хорошо известна в категории TOP топологических пространств и непрерывных отображений.
Амальгама (как конус)

$$
\begin{tikzcd}
& L & \\
A \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \\
& C \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

называется еще *кодекартовым квадратом;* это “минимальный” коммутативный квадрат, построенный над исходной диаграммой.
Частным случаем амальгамы является факторизация (например, для модулей, топологических пространств); в этом случае B – финальный объект, β – единственная стрелка в него, C – подструктура A, α – включение, L= A/C.
Свойство минимальности состоит в том, что всякий морфизм $A \to X$, при котором C отображается в точку (в 0 - в случае модулей), пропускается через канонический морфизм $A \to A/C$.