

# Категории и универсальная алгебра (2015)

## Лекция 6

### Пределы (продолжение)

Определение Категория называется *полной*, если в ней всякая диаграмма имеет предел; *конечно полной*, если в ней всякая конечная диаграмма (т.е. диаграмма с конечной схемой) имеет предел.

Категория - *с произведениями*, если в ней существуют произведения любых семейств объектов; *с конечными произведениями*, если в ней существуют произведения любых конечных семейств объектов.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B$$

Категория - *с уравнителями*, если в ней существуют уравнители для всех диаграмм вида

Теорема 6.1 Всякая категория с произведениями и уравнителями полна; аналогично, всякая категория с конечными произведениями и уравнителями конечно полна.

Двойственные понятия: кополнота, категория с копроизведениями, категория с коуравнителями.

Теорема 6.1° Всякая категория с [конечными] копроизведениями и коуравнителями [конечно] полна.

(= теореме 6.1 для двойственной категории).

Для доказательства теоремы 6.1 для каждой диаграммы  $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  построим объекты

$$P := \prod_{j \in J} D_j, \quad Q := \prod_{\alpha \in \text{Mor}(J)} D_{\text{конец}(\alpha)}.$$

вместе с проекциями

$$p_j: P \rightarrow D_j, \quad \pi_\alpha: Q \rightarrow D_{\text{конец}(\alpha)}.$$

Затем построим

$$P \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} Q$$

где  $\varphi := \langle \varphi_\alpha \rangle_{\alpha \in \text{Mor } \mathcal{J}}$ ,  $\psi := \langle \psi_\alpha \rangle_{\alpha \in \text{Mor } \mathcal{J}}$ ,

$$\varphi_\alpha := p_{\text{конец}(\alpha)}, \quad \psi_\alpha := p_{\text{начало}(\alpha)} \cdot D_\alpha.$$

Тогда, если  $e: E \rightarrow P$  – уравнитель пары  $\varphi, \psi$ , то получаем предел для  $\mathbf{D}$ :

$(E, (e \cdot p)_{j \in \mathcal{J}})$ .

## Дальнейшие примеры пределов и копределов

Пример 8 Пусть  $(X, \leq)$  - частично упорядоченное множество (ЧУМ), ему соответствует категория  $\mathcal{C} = \text{CPO}(X, \leq)$  (см. лекцию 2).

В этой категории конус над семейством объектов  $(X_j)_{j \in J}$  – это их миноранта, т.е.

такое  $y$ , что  $y \leq X_j$  для всех  $j$  (с формальной точки зрения, это не конус, а его вершина; конус получится, если добавим единственные стрелки  $(y, X_j)$ ).

Произведение данного семейства в  $\mathcal{C}$  - это его наибольшая миноранта, т.е.  $\inf$ .

Двойственное понятие –  $\sup$ ; это наименьшая мажоранта. Она является суммой данного семейства объектов в  $\mathcal{C}$ .

Определение *Нижняя полурешетка* – это ЧУМ, в котором существует  $\inf$  для любой пары (а значит, и для любого непустого конечного семейства) элементов.

*Верхняя полурешетка* – это ЧУМ, в котором существует  $\sup$  для любой пары (а значит, и для любого непустого конечного семейства) элементов.

*Решетка* – это одновременно нижняя и верхняя полурешетка.

Заметим, что  $\inf \emptyset$  - это наибольший элемент  $X$  (т.е. финальный объект  $\mathcal{C}$ );  $\sup \emptyset$  - наименьший элемент  $X$ .

Предложение 6.2 Если в ЧУМ  $(X, \leq)$  любое подмножество имеет  $\sup$ , то любое подмножество имеет  $\inf$ .

В таком случае  $(X, \leq)$  называется *полной решеткой*.

Пример 9 Диаграмма со схемой  $\text{CPO}(\mathbf{N}, \geq)$  задается последовательностью стрелок

$d_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ ; остальные стрелки восстанавливаются по композиции. Предел такой

диаграммы – это обычный обратный (проективный) предел последовательности. В

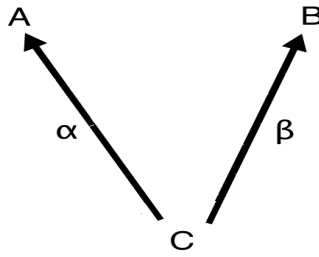
частности, кольцо целых  $p$ -адических чисел  $\mathbf{Z}_p$  получается как обратный предел колец

$\mathbf{Z}/(p^n)$  ( $d_n: \mathbf{Z}/(p^{n+1}) \rightarrow \mathbf{Z}/(p^n)$  – это факторизация по главному идеалу, порожденному  $p$ ).

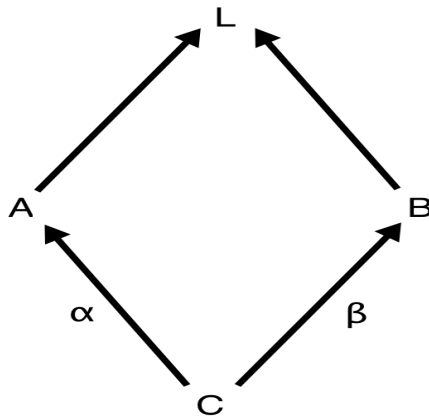
Пример 10 Аналогично, предел диаграммы со схемой  $\text{CPO}(\mathbf{N}, \leq)$  - это прямой

(индуктивный) предел последовательности  $d_n: D_n \rightarrow D_{n+1}$ .

Пример 11 Копредел диаграммы



называется *амальгамой* (или *амальгамированной суммой*). Такая конструкция хорошо известна в категории ТОР топологических пространств и непрерывных отображений. Амальгама (как конус)



называется еще *кодекарттовым квадратом*; это “минимальный” коммутативный квадрат, построенный над исходной диаграммой.

Частным случаем амальгамы является факторизация (например, для модулей, топологических пространств); в этом случае  $B$  – финальный объект,  $\beta$  – единственная стрелка в него,  $C$  – подструктура  $A$ ,  $\alpha$  – включение,  $L = A/C$ .

Свойство минимальности состоит в том, что всякий морфизм  $A \rightarrow X$ , при котором  $C$  отображается в точку (в  $0$  - в случае модулей), пропускается через канонический морфизм  $A \rightarrow A/C$ .