Теория струн и конформная теория поля.
Контрольная работа. Экзамен

1. В теории свободного скалярного поля с голоморфным током $J(z) = i\partial\phi(z)$, $\langle J(z_1)J(z_2)\rangle = \frac{1}{(z_1-z_2)^2}$ найдите вакуумные средние а) $\langle J(z_1)J(z_2)J(z_3)J(z_4)\rangle$, б) $\langle W(z_1)W(z_2)\rangle$, где $W(z) = \frac{1}{3} : J^3(z) :$.

2. В теории Фейгина-Фукса свободного скалярного поля с тензором энергии-импульса $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}$

$$T(z) = \frac{1}{2} : J^2(z) : +\beta\partial J(z)$$

   а) получите выражения для генераторов алгебры Вирасоро L_n через генераторы алгебры Гейзенберга $\{\alpha_n | J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}\}$;

   б) найдите центральный заряд алгебры Вирасоро.

3. В теории свободных безмассовых фермионов с действием $\frac{1}{\pi}\int \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi \; d^2z$ вычислите $\left\langle \tilde{\psi}(z_1)\ldots\tilde{\psi}(z_n)\,\psi(w_n)\ldots\psi(w_1)\right\rangle$.

4. В теории с генераторами Вирасоро $L_n = \frac{1}{2}\sum_{m+k=n} : \alpha_m\alpha_k :$ ($[\alpha_m, \alpha_k] = m\delta_{k+m,0}$, нормальное упорядочение :: переносит операторы рождения налево, уничтожения - направо) рассмотрим стандартное представление $\mathcal{H}_p$, порождённое вектором $|p\rangle$, таким что $\alpha_0|p\rangle = p|p\rangle$, $\alpha_n|p\rangle = 0$ при $n > 0$. Вычислите:

   - $L_0|p\rangle$
   - $L_n|p\rangle$ при $n > 0$
   - $L_{-1}|p\rangle$, при каком значении p этот вектор зануляется?
   - $L_{-1}^2|p\rangle$ и $L_{-2}|p\rangle$, при каких значениях p эти вектора становятся линейно зависимыми?
   - Вычислить $Z_p(q) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_p}\, q^{L_0}$.

5. Из операторных разложений для токов

$$H(z)J_\pm(z') = \pm\frac{2}{z-z'}J_\pm(z') + \ldots, \qquad J_+(z)J_-(z') = \frac{k}{(z-z')^2} + \frac{H(z')}{z-z'} + \ldots,$$

$$H(z)H(z') = \frac{2k}{(z-z')^2} + \ldots$$

   - вывести коммутационные соотношения Каца-Муди для их коэффициентов разложения.
   - * Покажите, что выражение

$$T(z) = (J_+J_-)(z) + (J_-J_+)(z) + \frac{1}{2}(HH)(z)$$

   является тензором энергии-импульса. Чему равны размерности токов и центральный заряд соответствующей алгебры Вирасоро?

6. В теории с тремя бозонными полями J_1, J_2, J_3, т.ч. $J_1 + J_2 + J_3 = 0$ и

$$J_i(z)J_j(w) = \frac{\delta_{ij} - \frac{1}{3}}{(z-w)^2}$$

- рассмотрите тензор энергии-импульса

$$T(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} : J_i^2(z) :$$

проверьте, что он является тензором энергии-импульса, вычислите центральный заряд.

- Выразите оператор

$$\Lambda(z) = (TT)(z)$$

через нормальные произведения $: \ldots :$ бозонных операторов. Также запишите его компоненты в терминах алгебры Вирасоро.

- Для W-тока

$$W(z) =: J_1(z)J_2(z)J_3(z) :$$

вычислите операторное разложение $T(z)W(w)$. Примарное это поле или нет? Какой размерности?

- * Вычислите операторное разложение $W(z)W(w)$. Выразите ответ только в терминах полей $T(z)$, $(TT)(z)$, $W(z)$

подсказка: намного удобнее раскладывать поля в ответе вокруг точки $\frac{z+w}{2}$

7. Вычислите тензор энергии-импульса в теории Лиувилля $S[\phi] = \frac{1}{2}\int \partial\phi\bar{\partial}\phi d^2z + \mu \int e^{\phi} d^2z$

Во всех задачах “взаимодействующее” нормальное упорядочение (AB) определено как

$$(AB)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz \frac{A(z)B(w)}{z-w}$$