Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 11

Ω-алгебры

<u>Определение</u> *(Алгебраическая) сигнатура* имеет вид $\Omega = \bigcup\{\Omega_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, причем множества Ω_n попарно не пересекаются (и Ω непусто).
Элементы из Ω_n называются *n-местными функциональными символами*, 0-местные функциональные символы назваются также *константами*.
<u>Определение</u> *Ω-алгебра* состоит из *носителя* и *интерпретаци*и символов сигнатуры:
$A=(\underline{A}, I)$, где
носитель $\underline{A}$ — непустое множество,
интерпретация I — функция, определенная на Ω, такая что

$c \in \Omega_0 \Rightarrow I(c) \in \underline{A}$,

$f \in \Omega_n$, $n > 0 \Rightarrow I(f)\colon \underline{A}^n \to \underline{A}$.

Вместо I(c), I(f) будем писать c_A, f_A.
Таким образом, в Ω-алгебре константы превращаются в элементы носителя, а n-местные функциональными символы — в n-местные операции на носителе.
<u>Определение</u> *Гомоморфизм* Ω-алгебры A в Ω-алгебру B — это отображение носителей $\alpha\colon \underline{A} \to \underline{B}$, такое что

$c \in \Omega_0 \Rightarrow \alpha(c_A)= c_B$,

$f \in \Omega_n$, $n > 0 \Rightarrow \forall a_1,\dots,a_n \in \underline{A}\ \ \alpha(f_A(a_1,\dots,a_n)) = f_B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$.

<u>Лемма 11.1</u> (1) Ω-алгебры и гомоморфизмы образуют категорию (обозначение: Ω-ALG).
(2) Изоморфизмы в Ω-ALG - это биективные морфизмы.
<u>Определение</u> *Забывающий функтор* $\mathbf{U}_\Omega$: Ω-ALG $\rightsquigarrow$ SET переводит каждую алгебру в ее носитель, а каждый гомоморфизм — в себя.

Алгебры термов

<u>Определение</u> Множество *термов* $T_\Omega(X)$ сигнатуры Ω над множеством переменных X — это наименьшее множество слов (т.е. конечных последовательностей) T, такое что

- $a \in \Omega_0 \cup X \Rightarrow \langle a \rangle \in T$.

Здесь $\langle a \rangle$ - слово из одной буквы a. Как правило, его отождествляют с a;
тогда условие запишется в виде $\Omega_0 \cup X \subset T$.

- $t_1,\dots,t_n \in T$, $f \in \Omega_n \Rightarrow ft_1\dots t_n \in T$.

Бесскобочная запись оправдывается следующим утверждением:
<u>Лемма об однозначном чтении</u> Если $ft_1\dots t_n = fr_1\dots r_n$, то $t_1 = r_1, \dots, t_n = r_n$.

Однако, ради удобства, используется запись $f(t_1,\dots,t_n)$ вместо $ft_1\dots t_n$, а также (для 2местного f) (t_1ft_2) вместо ft_1t_2.

Множество $T = T_\Omega(X)$ превращается в Ω-алгебру со следующими операциями:

- $c_T := \langle c \rangle$, если $c \in \Omega_0$
- $f_T(t_1,...,t_n) := ft_1...t_n$, если $f \in \Omega_n$, $n>0$

Пусть i_X: $X \to T_\Omega(X)$ — каноническая инъекция, переводящая x в $\langle x \rangle$. (Если забыть про угловые скобки, то i_X можно считать просто включением.)

<u>Теорема 11.2</u> Алгебра термов $T_\Omega(X)$ *абсолютно свободна* над X, т.е.
для любой Ω-алгебры A и отображения φ: X → A существует единственный гомоморфизм $\bar{\varphi}$: $T_\Omega(X) \to A$, такой что $i_X \cdot \bar{\varphi} = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T_\Omega(X) \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Это означает:
$\bar{\varphi}(\langle x \rangle) = \varphi(x)$ для любого $x \in X$,
$\bar{\varphi}(\langle c \rangle) = c_A$ для любого $c \in \Omega_0$,
$\bar{\varphi}(ft_1 ... t_n) = f_A(\bar{\varphi}(t_1), ..., \bar{\varphi}(t_n))$ для любого $f \in \Omega_n$, $n>0$.
Равносильная формулировка теоремы: всякое отображение $i_X(X) \to A$, где A — Ω-алгебра, однозначно продолжается до гомоморфизма $T_\Omega(X) \to A$.
Отображение φ: X → A называется *оценкой* X в A.
Гомоморфизм $\bar{\varphi}$: $T_\Omega(X) \to A$ переводит каждый терм t в его *значение при оценке* φ.
$\bar{\varphi}(t)$ обозначается также через $| t |_\varphi$.
Теорема 11.2 утверждает, что значения всех термов при данной оценке определены однозначно.
<u>Теорема 11.3</u> Имеется функтор $\mathbf{T}_\Omega$: SET ⇝ Ω-ALG , переводящий X в $T_\Omega(X)$ и такой, что $\mathbf{T}_\Omega \dashv \mathbf{U}_\Omega$.

Подалгебры и гомоморфные образы

<u>Определение</u> *Вложение* — это инъективный гомоморфизм. Если вложение A → B является включением, то говорят, что A — подалгебра B.
Это означает:

$c_A = c_B$ для любого $c \in \Omega_0$,

$f_A(a_1,...,a_n) = f_B(a_1, ..., a_n)$ для любых $f \in \Omega_n$, $n>0$, $a_1,...,a_n \in \underline{A}$.

<u>Предложение 11.4</u>[1] Пусть B — Ω-алгебра, $S \subset \underline{B}$. Тогда
S — носитель подалгебры ⇔

$\forall c \in \Omega_0$ $c_B \in S$ & S замкнуто относительно всех операций f_B, где $f \in \Omega_n$, $n>0$.

Отсюда следует, что пересечение произвольного множества носителей подалгебр — снова носитель подалгебры. В частности, существует наименьшая подалгебра, содержащая данное множество $S \subset \underline{B}$; она называется *подалгеброй, порожденной S в B* и обозначается $[S]_B$.

1 В курсе оно было в лекции 12.

Предложение 11.5[2] Пусть α: A → B — гомоморфизм Ω-алгебр, $A_0 \subset A$ — подалгебра.
Тогда образ ее носителя $\alpha(\underline{A_0})$ является носителем подалгебры в B (которая называется *образом A_0 относительно* α и обозначается $\alpha(A_0)$).
В частности, $\mathrm{Im}\,\alpha = \alpha(A)$ — подалгебра B.
Предложение 11.6[3] Пусть α: A → B — гомоморфизм Ω-алгебр, $B_0 \subset B$ — подалгебра.
Тогда прообраз ее носителя $\alpha^{-1}(\underline{B_0})$ является носителем подалгебры в A (которая называется *прообразом B_0 относительно* α и обозначается $\alpha^{-1}(B_0)$).
Предложение 11.7 Пусть φ: X → A - оценка X в A. Тогда $[\mathrm{Im}\,\varphi]_A = \mathrm{Im}\ \bar{\varphi}$.
(здесь Im φ понимается как множество).
Следствие 11.8 Если $A = [X]_A$, то A — гомоморфный образ $T_\Omega(X)$.
Доказательство. Можно применить 11.7 к включению j: X → A.

2 В курсе оно было в лекции 12.
3 В курсе оно было в лекции 12.