Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 12

Гомоморфизмы и значения термов

Предложение 12.1 Если α: A → B — гомоморфизм Ω-алгебр, то для любого терма $t \in T_\Omega(X)$ и оценки $\varphi: X \to A$

$$\alpha(|\, t\, |_\varphi) = |\, t\, |_{\varphi\cdot\alpha}\, .$$

Если $t \in T_\Omega(\{x_1,...,x_n\})$, то терм t записывают как $t(x_1,...,x_n)$. В Ω-алгебре A каждому такому терму отвечает *термовая функция* t_A; это n-местная операция на A, такая что

$t_A(a_1,...,a_n) = |\, t\, |_\varphi$ для оценки φ, такой что $\varphi(x_i) = a_i$ при $i = 1,...,n$.

(Иначе это записывается так:

$t_A(\, a_1,..., a_n\,) := |\, t\, |\, [x_1 = a_1, ..., x_n= a_n]\,)$

Для термовых функций 12.1 означает:

$$\alpha(t_A(a_1,...,a_n)) = t_B(\alpha(a_1), ..., \alpha(a_n)).$$

Конгруэнции и факторалгебры

Определение Отношение эквивалентности $\sim$ на Ω-алгебре A (точнее, на ее носителе) называется *конгруэнцией*, если оно согласовано со всеми операциями из A, т. е. для любой $f\in \Omega_n$, $n>0$, если $a_1 \sim b_1,..., a_n \sim b_n$, то $f_A(a_1,...,a_n) \sim f_A(b_1,...,b_n)$.

Для конгруэнции ~ класс эквивалентности элемента a обозначим $\tilde{a}$.

Фактормножество A/~ можно превратить в Ω-алгебру, положив

$c_{\tilde{A}} := \widetilde{c_A}$,

$f_{\tilde{A}}(a_1,\dots,a_n) := \widetilde{f_A(a_1,\dots,a_n)}$.

Полученная алгебра называется *факторалгеброй* A по ~ и обозначается A/~

Лемма 12.2 (1) Определение $f_{\tilde{A}}$ корректно.

(2) Каноническое отображение $a \mapsto \tilde{a}$ - гомоморфизм A на A/~.

Лемма 12.3 Если α: A → B — гомоморфизм, то отношение

$\sim_\alpha\ :=\ \{(x,y) \mid \alpha(x)=\alpha(y)\}$

является когруэнцией на A.

Теорема 12.4 (теорема о гомоморфизме; 1-я теорема Нётер).

Если α: A → B — гомоморфизм, то $\mathrm{Im}\, \alpha \cong A/\sim_\alpha$.

Полнота и кополнота Ω-ALG

Теорема 12.5 Ω-ALG — категория с уравнителями.

Для доказательства можно использовать конструкцию уравнителя в SET (теорема 5.3) и заметить, что E — подалгебра A.

Теорема 12.6 Ω-ALG — категория с произведениями.

Для доказательства можно использовать произведения в SET (теорема 5.1).

Произведение алгебр $\prod_{j \in J} A_j$ определяется как произведение носителей с операциями, заданными покоординатно, т. е. так, чтобы $p_j(f_A(a_1,\ldots,a_n)) := f_{A_j}(p_j(a_1), \ldots, p_j(a_n))$.

<u>Следствие 12.7</u> Ω-ALG — полная категория.

<u>Теорема 12.8</u> Ω-ALG — категория с коуравнителями.

Чтобы построить коуравнитель стрелок $\alpha, \beta: A \to B$, рассмотрим наименьшую конгруэнцию $\sim$ в B, содержащую все пары $(\alpha(a), \beta(a))$ для $a \in A$; коуравнитель задается каноническим гомоморфизмом $B \to B/\sim$.

<u>Теорема 12.9</u> Ω-ALG — категория с суммами.

(В курсе приводилась без доказательства)

Из 12.8 и 12.9 следует кополнота Ω-ALG.