Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 13

Тождества в алгебрах

Определение[1] *Тождество* в сигнатуре Ω над множеством переменных X —
это запись вида $t \equiv r$, где $t, r \in T_\Omega(X)$ (т.е. по существу, тождество — это пара термов).
Тождество $t \equiv r$ *истинно в Ω-алгебре A* (обозначение: $A \vDash t \equiv r$), если $| t |_\varphi = | r |_\varphi$ для любой оценки $\varphi: X \to A$.
Поскольку значение терма зависит только от значений входящих в него переменных, в качестве X можно здесь использовать множество переменных, входящих в термы t, r.
Предложение 13.1 Если $A \vDash t \equiv r$ и $B \subset A$ — подалгебра, то $B \vDash t \equiv r$.
Предложение 13.2 Если $A \vDash t \equiv r$ и B — гомоморфный образ A, то $B \vDash t \equiv r$.
Предложение 13.3 Если $(A_j)_{j \in J}$ - семейство Ω-алгебр и $A_j \vDash t \equiv r$ для всех $j \in J$,
то $\prod A_j \vDash t \equiv r$.
Определение Оценка $\sigma: Y \to T_\Omega(X)$ называется *подстановкой термов вместо переменных из Y.*
Если $t \in T_\Omega(X)$, то вместо $\bar{\sigma}(t)$ или $| t |_\sigma$ пишут также σt.
Если записать терм t в виде $t(y_1,...,y_n)$ (т. е. если $y_1,...,y_n$ — список входящих в него переменных) и если $\sigma(y_i)=r_i$, то σt обозначается еще как $t(r_1,\ldots,r_n)$.

Типичный пример подстановки — переименование переменных. Если дана функция $\gamma: Y \to X$, то возникает подстановка $\sigma = \gamma \cdot i_X: Y \to T_\Omega(X)$.
При этом для $t=t(y_1,...,y_n)$, $\gamma(y_i) = x_i$, имеем: $\sigma t= t(x_1,\ldots,x_n)$

Предложение 13.4 Пусть $\varphi: X \to A$ - оценка в Ω-алгебре, $\sigma: Y \to T_\Omega(X)$ — подстановка, $t \in T_\Omega(X)$.

Тогда $| \sigma t |_\varphi = |t|_{\sigma \cdot \bar{\varphi}}$.

В частности, при переименовании переменных $\gamma: Y \to X$ получаем для $t=t(y_1,...,y_n)$:

$| t(x_1,\ldots,x_n) |_\varphi = |t|_{\gamma \cdot \varphi}$

Следствие 13.5 Если $t,r \in T_\Omega(X)$, $\sigma: Y \to T_\Omega(X)$ и $A \vDash t \equiv r$, то $A \vDash \sigma t \equiv \sigma r$.

Многообразия алгебр

Определение *Многообразие Ω-алгебр,* задаваемое системой тождеств Σ в сигнатуре Ω, - это класс всех Ω-алгебр, в которых истинны все тождества из Σ. Обозначение: $V_\Omega(\Sigma)$.
Примеры: моноиды, группы, кольца с единицей …
Лемма 13.6 Всякое многообразие задается системой тождеств с переменными из фиксированного счетного множества $X_0 = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$.
Из 13.1,13.2,13.3 получаем:
Теорема 13.7 Всякое многообразие замкнуто относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений.

---

1 В курсе начальная часть это лекции входила в лекцию 12.

Отсюда видим, например, что группы не образуют многообразия в сигнатуре с одним умножением; поля не образуют многообразия в сигнатуре колец и т.д.

Эквациональные теории

По системе тождеств Σ с переменными из X в сигнатуре Ω построим *эквациональную теорию* $S(\Sigma)$ следующим образом.

АКСИОМЫ

1. $t \equiv t$, где $t \in T_\Omega(X)$
2. все тождества из Σ

ПРАВИЛА ВЫВОДА

1. Симметричность $\dfrac{t \equiv r}{r \equiv t}$
2. Транзитивность $\dfrac{t \equiv r,\ r \equiv s}{t \equiv s}$
3. Эквивалентная замена $\dfrac{t_1 \equiv r_1, \dots, t_n \equiv r_n}{ft_1 \dots t_n \equiv fr_1 \dots r_n}$ для всех $f \in \Omega_n$
4. Подстановка $\dfrac{t \equiv r}{\sigma t \equiv \sigma r}$ для всех $\sigma: X \to T_\Omega(X)$

<u>Замечание</u> Равносильное определение получается, если не постулируется правило подстановки, но аксиомы 2 заменяются на все тождества вида $\sigma t \equiv \sigma r$, где $(t \equiv r) \in \Sigma$, $\sigma: X \to T_\Omega(X)$.
<u>Теорема 13.8 (теорема корректности)</u> Если $S(\Sigma) \vdash t \equiv r$, то $V(\Sigma) \vDash t \equiv r$ (т. е. тождество верно во всех алгебрах из $V(\Sigma)$).
<u>Лемма 13.9</u> Отношение $\approx_\Sigma := \{(t,r) \mid S(\Sigma) \vdash t \equiv r\}$ является конгруэнцией на $T_\Omega(X)$.
<u>Определение</u> Факторалгебра $F_\Sigma(X) := T_\Omega(X)/\approx_\Sigma$ называется *алгеброй Линденбаума — Тарского* .
<u>Лемма 13.10</u> $F_\Sigma(X) \vDash \Sigma$.

Пусть $j_X: X \to F_\Sigma(X)$ — каноническое отображение, переводящее каждый элемент X в его класс по $\approx_\Sigma$.
<u>Теорема о свободе 13.11</u> Для любой алгебры $A \in V(\Sigma)$ и оценки $\varphi: X \to A$ существует единственный гомоморфизм $\tilde{\varphi} : F_\Sigma(X) \to A$, такой что $j_X \cdot \tilde{\varphi} = \varphi$.
<u>Теорема Биркгофа о полноте 13.12</u> Для любых термов $t, r \in T_\Omega(X)$

$$S(\Sigma) \vdash t \equiv r \Leftrightarrow F_\Sigma(X) \vDash t \equiv r \Leftrightarrow V(\Sigma) \vDash t \equiv r.$$