

Дискретная математика

Семинар 3

ВШЭ, факультет математики

первый курс

1. Найдите число длинных циклов в группе S_n .
2. Найдите ряд $A(s) = \sum_{k \geq 0} a_k s^k$, такой что $A(s)^2 = 1 + s$.
3. Обобщите предыдущую задачу на случай $A(s)^n = 1 + s$, $n > 2$.
4. Число Стирлинга первого рода $c(n, k)$ определяется как количество перестановок из S_n , которые раскладываются в произведение ровно k непересекающихся циклов. Докажите, что

$$c(n, k) = (n - 1)c(n - 1, k) + c(n - 1, k - 1).$$

5. Выразите коэффициенты многочлена $x(x+1) \dots (x+n-1)$ через числа Стирлинга первого рода. Вычислите сумму чисел Стирлинга первого рода $\sum_{k \geq 0} c(n, k)$.
6. Определите коэффициенты a_n в разложении

$$(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^4)(1 + qs^8) \dots = \sum_{n \geq 0} a_n s^n.$$

7. Докажите тождество

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \dots + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$