Вопросы к экзамену по 2 модулю.

В список вопросов вошли некоторые темы, обсуждавшиеся в конце первого модуля.

В билетах будут присутствовать также отсутствующие здесь вопросы из программы первого коллоквиума (первые два вопроса билета); отвечать их придется только тем, у кого за первый коллоквиум меньше 9.

(1) Критерий монотонности дифференцируемой функции. Критерий строгой монотонности.

(2) Теоремы Лагранжа и Коши.

(3) Теорема Дарбу (производная дифференцируемой на отрезке функции принимает на этом отрезке все промежуточные значения).

(4) Производная дифференцируемой на отрезке функции не может иметь точек разрыва первого рода.

(5) Выпуклые функции. Непрерывность выпуклой функции на интервале. Существование односторонних производных у выпуклой на отрезке функции и связь между ними.

(6) Выпуклая функция дифференцируема всюду, кроме счетного множества точек. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.

(7) Существование и дифференцируемость обратной функции. Производная обратной функции.

(8) Дифференцируемость функции из $D \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ (вектор-функции). Ее дифференциал и его геометрический смысл.

(9) Дифференцируемость функции из $D \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$. Параметрическое задание кривой. Условие существования функции одной переменной при ее параметрическом задании, Первая и вторая производные функции, заданной параметически.

(10) Дифференцируемость функции из $D \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ (Функции двух переменных.) Частные производные. Дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл.

(11) Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных. Пример не дифференцируемой в некоторой точке функции двух переменных, имеющей обе частные производные в окрестности этой точки.

(12) Теорема о неявной функции (для функции двух переменных).

(13) Теорема Лопиталя для неопределенностей типа $0/0$. (В конечной точке и в бесконечности.)

(14) Теорема Лопиталя для неопределенностей типа ∞/∞.

(15) Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума (в терминах первой не обращающейся в ноль производной в данной точке).

(16) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

(17) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

(18) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

(19) Ряд Тейлора для показательной и тригонометрических функций; его сходимость.

(20) Бином Ньютона (ряд Тейлора для $(1+x)^\alpha$); его сходимость.

(21) Ряд Тейлора для $\ln(1+x)$; его сходимость.

(22) Пример ненулевой бесконечно-дифференцируемой функции с нулевым рядом Тейлора.

(23) Равномерная непрерывность функции. Достаточные условия равномерной непрерывности (условие Липшица, ограниченность производной). Пример ограниченной непрерывной функции,не являющейся равномерно непрерывной.

(24) Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(25) Первообразная; ее единственность (с точностью до константы) на промежутке. Две основные формулы для вычисления первообразной: замена переменной и интегрирование по частям.

(26) Метрика на пространстве всех ограниченных функций. Определение равномерной сходимости.

(27) Любая непрерывная функция на отрезке есть равномерный предел ступенчатых функций.

(28) Равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

(29) Равномерная и поточечная сходимость. Пример последовательности функций, сходящейся поточечно, но не равномерно. Пример последовательности непрерывных функций, сходящейся поточечно к разрывной функции.

(30) Определенный интеграл как линейный аддитивный монотонный функционал на подходящем пространстве функций. Существование и единственность в случае пространства ступенчатых функций.

(31) Определенный интеграл как линейный аддитивный монотонный функционал на подходящем пространстве функций. Его непрерывность в метрике равномерной сходимости. Интеграл от функции, являющейся равномерным пределом последовательности функций, равен пределу последовательности интегралов от этих функций.

(32) Определенный интеграл как линейный аддитивный монотонный функционал на подходящем пространстве функций. Интеграл с переменным верхним пределом, как функция от этого верхнего предела. Ее непрерывность. Теорема Ньютона-Лейбница.

(33) Определенный интеграл как линейный аддитивный монотонный функционал на подходящем пространстве функций. Определение на пространстве непрерывных функций через верхнюю и нижнюю интегральные суммы.

(34) Любая непрерывная функция обладает первообразной.