Листок 8. Числовые ряды

Анализ, 1 курс, **14.01.2016**

8⋄1 Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и пусть $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Докажите, что $\sum c_n$ тоже сходится.

8⋄2 Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, а $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant K < \infty$. Докажите, что ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

8⋄3 Исследуйте следующие положительные ряды на сходимость:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}$, где $q \in (0,1)$; **в)** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$; **г)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

8⋄4 Пусть $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Докажите, что существует такая монотонно убывающая последовательность $b_n > 0$, что ряд $\sum b_n$ расходится, а ряд $\sum a_n b_n$ — сходится.

8⋄5 Пусть a_n — монотонная последовательность, такая, что $a_n > 0$, и $a_n \to 0$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum (-1)^n a_n$ сходится? Останется ли утверждение пункта верным, если отбросить требование монотонности a_n?

8⋄6 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Обязательно ли сходится ряд **а)** $\sum a_n^2$; **б)** $\sum a_n^3$.

8⋄7 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, и пусть $\lim a_n/b_n = 1$. Следует ли из этого, что ряд $\sum b_n$ сходится?

8⋄8 Докажите, что следующие утверждения равносильны.
(1) Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно.
(2) Для любой последовательности δ_n из нулей и единиц ряд $\sum \delta_n a_n$ сходится.
(3) Для любой последовательности комплексных чисел ε_n, таких, что $|\varepsilon_n| = 1$, ряд $\sum \varepsilon_n a_n$ сходится.

8⋄9 Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$, где F_n — числа Фибоначчи? (Числа Фибоначчи определяются условием $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентной формулой $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n > 1$.)

8⋄10 Исследуйте на сходимость знакопеременные ряды: **а)** $\sum \frac{\cos n}{n}$; **б)** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$.

8⋄11 (*) Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{N}$ будем называть суммой частичного ряда, соответствующего M, величину $S(M) = \sum_{n\in M} a_n$ (по определению $S(\emptyset) = 0$). Существует ли такой ряд $\sum a_n$, что $a_n \to 0$ и суммы всех его частичных рядов заполняют канторово множество?

8⋄12 (*) Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$, где p_n — n-е простое число?

8⋄13 (*) Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n}$?