Задачи по группам и алгебрам Ли, семестр 2, листок 1. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Для получения оценки "10" по данному листку надо сдать 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Следующий листок будет выдан 1 февраля.

В данном листке основное поле всегда $\mathbb{C}$, т.е. изучаются комплексные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (или $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модули, или, что то же самое, $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-модули). Зафиксируем стандартные образующие e, f, h алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, такие, что

$$[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f.$$

Категорией $\mathcal{O}$ называется категория $\mathfrak{sl}_2$-модулей V, удовлетворяющих следующим свойствам:

(1) V конечно порожден как $U(\mathfrak{sl}_2)$-модуль.

(2) Элемент $h \in \mathfrak{sl}_2$ действует на V полупросто, т.е. $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V(\lambda)$, где $\forall v \in V(\lambda)\ hv = \lambda v$.

(3) Элемент $e \in \mathfrak{sl}_2$ действует на V локально нильпотентно, т.е. $\forall v \in V\ \exists N \in \mathbb{Z}_{>0}\ e^N v = 0$.

1. а) Докажите, что всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль лежит в категории $\mathcal{O}$. **б)** Докажите, что для всякого модуля V из категории $\mathcal{O}$ все весовые подпространства $V(\lambda)$ конечномерны. **в)** Докажите, что для всякого модуля V из категории $\mathcal{O}$ множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $V(\lambda) \neq 0$, ограничено сверху (т.е. $Re\lambda$ ограничены сверху) и лежит в конечном объединении смежных классов $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Нам понадобится пополненная версия категории $\mathcal{O}$, в которой условие конечной порожденности заменено на условия 1б)-1в). Начиная с этого момента, мы будем работать именно с этой (пополненной) категорией, и будем именно ее обозначать символом $\mathcal{O}$.

2. а) Пусть V – $\mathfrak{sl}_2$-модуль из категории $\mathcal{O}$. *Характером* модуля V называется формальный ряд $\chi_V(q) := \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} q^\lambda \dim V(\lambda)$. Докажите, что для точной последовательности $0 \to U \to V \to W \to 0$ имеем $\chi_V(q) = \chi_U(q) + \chi_W(q)$. **б)** Докажите, что тензорное произведение модулей из категории $\mathcal{O}$ снова лежит в категории $\mathcal{O}$ и $\chi_{U\otimes V}(q) = \chi_U(q)\chi_V(q)$.

3. *Модулем Верма* со старшим весом λ называется $\mathfrak{sl}_2$-модуль

$$M_\lambda := U(\mathfrak{sl}_2)/(U(\mathfrak{sl}_2)e + U(\mathfrak{sl}_2)(h-\lambda)).$$

Образ элемента $1 \in U(\mathfrak{sl}_2)$ называется *старшим вектором* и обозначается $v_\lambda \in M_\lambda$ **а)** Докажите, что модуль Верма лежит в категории $\mathcal{O}$. **б)** Вычислите характер модуля Верма. *Указание:* по теореме ПБВ векторы $f^k v_\lambda,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ образуют базис в M_λ.

Пусть V – $\mathfrak{sl}_2$-модуль из категории $\mathcal{O}$. Вектор $v \in V(\lambda)$ называется *особым вектором веса* λ, если $ev = 0$.

4. а) Докажите, что в любом $\mathfrak{sl}_2$-модуле из категории $\mathcal{O}$ есть ненулевые особые векторы. **б)** Докажите, что модуль Верма M_λ обладает (и однозначно определяется) следующим универсальным свойством: для любого модуля V из категории $\mathcal{O}$ и особого вектора $v \in V$ веса λ существует единственный гомоморфизм $\varphi : M_\lambda \to V$ такой, что $\varphi(v_\lambda) = v$. **в)** Докажите, что для $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ модуль M_λ неприводим. *Указание:* в подмодуле должен быть особый вектор. **г)** Докажите, что для $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеется точная последовательность $0 \to M_{-2-\lambda} \to M_\lambda \to V_\lambda \to 0$, где V_λ – конечномерный неприводимый модуль. *Указание:* Найдите все особые векторы и воспользуйтесь универсальным свойством модуля Верма.

5. Пусть V – $\mathfrak{sl}_2$-модуль из категории $\mathcal{O}$. *Контрагредиентно двойственным* модулем называется пространство $V^\vee := \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V(\lambda)^*$, на котором оператор e действует как f^*, h как $-h^*$, а f как e^*. **а)** Докажите, что модуль $V^\vee$ лежит в категории $\mathcal{O}$. **б)** Докажите, что $\chi_V(q) = \chi_{V^\vee}(q)$. **в)** Докажите, что для $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ модуль $M_\lambda^\vee$ неприводим и изоморфен M_λ. **г)** Докажите, что для $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеется точная последовательность $0 \to V_\lambda \to M_\lambda^\vee \to M_{-2-\lambda}^\vee \to 0$.

6. а) Докажите, что элемент $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ (называемый *элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$. *Указание:* элемент лежит в центре $U(\mathfrak{g})$, если и только если он коммутирует со всеми элементами *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. **б*)** Докажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов вида

$e^ih^jC^k$ и $f^ih^jC^k$, где i,j,k – целые неотрицательные числа. *Указание:* воспользуйтесь теоремой ПБВ. **в***) Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$ порожден элементом C.

7. а) Докажите, что элемент Казимира действует на модулях из категории $\mathcal{O}$, сохраняя весовое разложение. **б)** Докажите, что элемент Казимира действует скаляром на модуле Верма, и вычислите этот скаляр в зависимости от старшего веса модуля. **в)** Докажите, что в любом модуле из категории $\mathcal{O}$ корневые пространства относительно элемента Казимира являются подмодулями. Таким образом, всякий модуль из категории $\mathcal{O}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{sl}_2$-подмодулей по собственным значениям элемента Казимира. **г)** Докажите, что если на модулях U и V элемент Казимира действует с различными собственными значениями, то между модулями U и V не существует нетривиальных гомоморфизмов и расширений.

Таким образом, категория $\mathcal{O}$ раскладывается по собственным значениям элемента Казимира в прямую сумму подкатегорий $\mathcal{O}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, таких модулей из категории $\mathcal{O}$, на которых элемент Казимира действует (возможно, не полупросто) с единственным собственным значением $\frac{\lambda(\lambda+2)}{2}$ (в частности, $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{-2-\lambda}$).

8. а) Покажите, что модули V_λ, M_λ, $M_\lambda^\vee$ лежат в категории $\mathcal{O}_\lambda$. **б)** Покажите, что особые векторы в $\mathfrak{sl}_2$-модуле из категории $\mathcal{O}_\lambda$ не могут иметь весов, отличных от λ и $-2-\lambda$. **в)** Докажите, что для $\lambda \notin \mathbb{Z}$ всякий объект в категории $\mathcal{O}_\lambda$ есть прямая сумма нескольких копий M_λ и нескольких копий $M_{-2-\lambda}$. В частности, всякий неразложимый объект этой категории неприводим, т.е. категория *полупроста.* **г)** Докажите, что категория $\mathcal{O}_{-1}$ полупроста, и найдите в ней все неприводимые объекты.

9. а) Пусть $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим модуль $P := M_\lambda \otimes M_{-\lambda}$. Покажите, что P содержит особые векторы всех весов $-2k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. **б)** Покажите, что $P = P_{-2} \oplus \bigoplus_{k\geq 2} M_{-2k}$, где P_{-2} – подмодуль, порожденный весовым пространством $P(-2)$. **в)** Докажите, что P_{-2} является неразложимым объектом категории $\mathcal{O}_0$. **г)** Докажите, что всякий неразложимый объект категории $\mathcal{O}_0$ изоморфен одному из следующих пяти: V_0, M_0, $M_0^\vee$, M_{-2}, P_{-2}.

10*. Разложите в прямую сумму неразложимых объектов тензорное произведение **а)** $M_\lambda \otimes M_\mu$; **б)** $M_\lambda^\vee \otimes M_\mu^\vee$; **в)** $M_\lambda \otimes M_\mu^\vee$. *Указание:* ответ зависит от того, являются ли целыми неотрицательными каждое из чисел λ, μ, $\lambda+\mu$.

11*. а) Опишите все неразложимые объекты в категории $\mathcal{O}_\lambda$ для $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. **б)** Какие из этих объектов неприводимы? **в)** Какие из них проективны? **г)** Докажите, что в категории $\mathcal{O}$ достаточно много проективных объектов. **д)** Выпишите проективную резольвенту тривиального модуля в категории $\mathcal{O}$. **е)** Тот же вопрос для произвольного модуля из категории $\mathcal{O}$.

12. а) Группа Ли $SL_2(\mathbb{C})$ действует дробно-линейными преобразованиями $\mathbb{CP}^1$, так что подгруппа $\exp te \subset SL_2$ стабилизирует точку $\infty \in \mathbb{CP}^1$. Получается гомоморфизм $\mathfrak{sl}_2$ в алгебру Ли векторных полей на $\mathbb{CP}^1$. Выпишите образы элементов e,h,f в координате на стандартной аффинной карте $\mathbb{CP}^1\backslash\infty$. **б)** По универсальному свойству алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$, имеем гомоморфизм $U(\mathfrak{sl}_2)$ в алгебру голоморфных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$. Опишите ядро этого гомоморфизма. **в***) Докажите, что этот гомоморфизм сюръективен.

13. а) Пользуясь гомоморфизмом из задачи 12а, постройте действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве $\mathbb{C}[z]$ полиномиальных функций на стандартной аффинной карте. **б)** Покажите, что получился неразложимый модуль из категории $\mathcal{O}_0$, изоморфный $M_0^\vee$. **в***) Постройте действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве обобщенных функций на $\mathbb{CP}^1$, сосредоточенных в точке ∞, и покажите, что получившийся модуль изоморфен M_0.

14. Векторные поля на аффинной прямой действуют на *тензорных полях* степени $m \in \mathbb{C}$, т.е. на выражениях вида $F(z)(dz)^m$, $F(z) \in \mathbb{C}[z]$, следующим образом:

$$g(z)\frac{\partial}{\partial z}(F(z)(dz)^m) := (g(z)F'(z) + mg'(z)F(z))(dz)^m.$$

а) Покажите, что это в самом деле представление алгебры Ли векторных полей. **б)** Покажите, что ограничение этого представление на подалгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$ из задачи 12а дает $\mathfrak{sl}_2$-модуль $M_{-2m}^\vee$.