Дискретная математика
Семинар 4

ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Докажите равенства
$$\sin^2(s)+\cos^2(s)=1,\ (1+s)^\alpha(1+s)^\beta=(1+s)^{\alpha+\beta}.$$

2. Образуют ли формальные ряды группу относительно операции композиция? Если да, то является ли эта группа абелевой?

3. Докажите формулу замены переменных в интеграле: для ряда $B = B(t)$ с нулевым свободным членом ($B(0) = 0$) и произвольного ряда $A = A(s)$
$$\left(\int A\right)(B(t)) = \int (A(B(t))B'(t).$$

4. Найдите производящие функции для последовательностей:

- $1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \ldots$;
- $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$;
- $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$;
- $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$.

5. Пусть $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \ldots$ – производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Найдите производящие функции для последовательностей:
а). $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$;
б). $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$;
в). $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \ldots$;
г). $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$.

6. Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите тождества:
а). $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;
б). $F_0 + F_2 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}$;
в). $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$;
г). $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

7. Рекуррентное правило образования последовательности Фибоначчи позволяет продолжить ее “назад”, т.е. для отрицательных значений индекса. Так, например, $F_{-1} = 0$. Чему равно F_{-10}?