

Ряды Фурье в L_2 [срок сдачи 10.02]

Часть 1

Задача 1. Продолжаются ли до непрерывных функционалов на $L_2(\mathbb{R})$ следующие функционалы, заданные на $C_2^0(\mathbb{R})$:

a) $f \mapsto f(0)$,

b) $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$,

c) $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$, для $g \in C^0(\mathbb{R})$.

Задача 2*. Докажите, что функции $1, x, \dots, x^k, \dots$ не образуют базиса в $L_2[-1, 1]$.

Задача 3. Напишите формулу разложения в ряд Фурье на $[-1, 1]$ по системе полиномов Лежандра.

Подсказка: используйте материал занятия 1 и домашнего задания 1.

Часть 2

Задача 4 (Связь рядов Фурье и рядов Лорана). Пусть задан набор вещественных чисел $a_k, k \in \mathbb{Z}$, и числа $q \in (0, 1), C > 0$, для которых выполнено $|a_k| < Cq^{-|k|}$.

a) Докажите, что ряд $F(z) = \sum a_k z^k$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве области $|z| \in (q, q^{-1})$.

b) Разложите в ряд Фурье ограничение $F|_{S^1}$ функции F на окружность $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$.

Задача 5*. При каком необходимом и достаточном условии на ряд Фурье по экспонентам функция f из $L_2[-\pi, \pi]$, продолженная по периодичности на \mathbb{R} , продолжается в верхнюю полуплоскость до голоморфной ограниченной функции?

Продолжимость означает существование функции $F(x + iy), y > 0$, для которой семейство $f_y : x \mapsto F(x + iy), x \in [-\pi, \pi]$, сходится к $f(x)$ в $L_2[-\pi, \pi]$ при $y \rightarrow 0$.

Задача 6*. Рассмотрим функцию $f \in L_2(S^1)$ и положим

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \alpha k).$$

Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, где предел понимается в $L_2(S^1)$. Выразите ответ через коэффициенты Фурье функции f .

Подсказка: ответ зависит от того, будет ли отношение $\frac{\alpha}{\pi}$ рациональным или нет.

Часть 3

Задача 7*. Дана функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнено:

$$1) \varphi \geq 0 \quad 2) I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx < \infty \quad 3) \text{sign}(\varphi') = -\text{sign}(x).$$

Пусть $\psi = \frac{\varphi}{I}$. Докажите, что $\Delta_n : x \mapsto n\psi(nx)$ является δ -образной последовательностью.

Задача 8. Постройте δ -образную последовательность вида $C_n e^{-nx^2}$.

Подсказка: используйте равенство $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Задача 9*. Докажите, что любую финитную непрерывную функцию $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ можно приблизить в равномерной метрике финитными бесконечно гладкими функциями.