

Алгебра, семинар 7–11 декабря: группы

- Докажите, что для каждого простого p существует единственная группа порядка p .
 - Докажите, что если все элементы группы имеют порядок 2, то группа коммутативна.
 - Докажите, что подгруппа индекса 2 всегда нормальна.
- Представьте цикл длины n в виде произведения $n - 1$ транспозиции.
 - Опишите все подгруппы симметрической группы S_3 . Какие из них нормальны?
 - Постройте изоморфизм между группой вращений куба (тетраэдра) и S_4 (A_4).
 - Укажите две нетривиальные нормальные подгруппы в S_4 . Опишите факторгруппы по ним.
 - ^x Докажите, что других нет.
 - Постройте изоморфизм между группой вращений правильного додекаэдра и A_5 .
 - ^x Докажите, что A_5 проста.
- Задайте группу кватернионов $Q_8 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ образующими и соотношениями.
 - Опишите все ее подгруппы. Какие из них нормальны, каковы факторгруппы по ним?
- Напомним, что группа симметрий правильного n -угольника называется группой диэдра и обозначается через D_n .
 - Задайте ее образующими и соотношениями.
 - Какие из следующих групп изоморфны?
 $S_4, A_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D_12, D_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, D_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, Q_8 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, D_4 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, SL_2(\mathbb{F}_3)$.
- Перечислите все (с точностью до изоморфизма) группы не более чем из **a)** 5, **b)** 7, **c)** 8, **d)**^x 15 элементов. Выпишите их таблицы умножения, перечислите все подгруппы, укажите, какие из них нормальны, опишите факторгруппы.
- Для каждого нечетного $m|n$ укажите в D_n подгруппу порядка m , а для каждого четного $m|n$ укажите $\frac{n}{m} + 1$ подгрупп порядка m . Какие из них нормальны, каковы факторгруппы по ним?
 - ^x Докажите, что других подгрупп в D_n нет.