0.1. Гильбертовы пространства и базисы

1. Определение. *Вещественное или комплексное линейное пространство E называется евклидовым, если оно наделено скалярным произведением, т. е. скалярной функцией*

$$x, y \mapsto (x, y)$$

на $E \times E$, которая удовлетворяет следующим условиям:

(i) $(x, x) \geqslant 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *равносильно тому, что* $x = 0$,

(ii) *функции* $x \mapsto (x, y)$ *линейны*,

(iii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, *что в вещественном случае есть* $(x, y) = (y, x)$.

2. Пример. (i) $\mathbb{R}^n$: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

(ii) $\mathbb{C}^n$: $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$,

(iii) пространство $C_2[a, b]$ непрерывных функций на $[a, b]$ с

$$(f, g)_2 := \int_a^b f g \, dx$$

в вещественном случае и

$$(f, g)_2 := \int_a^b f \overline{g} \, dx$$

в комплексном; можно взять более широкое пространство $\mathcal{R}_2[a, b]$ интегрируемых по Риману функций с тем же скалярным произведением.

(iv) пространство l^2 всех вещественных (или комплексных) последовательностей $x = (x_n)$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Последний ряд сходится, ибо $|x_n y_n| \leqslant x_n^2 + y_n^2$. Непосредственно проверяется, что все нужные условия выполнены (в частности, указанные множества — линейные пространства).

Норма на евклидовом пространстве вводится формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Тот факт, что это норма, т. е. $\|\lambda\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\|x\| = 0$ в точности при $x = 0$ и выполнено неравенство треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, следует из свойств скалярного произведения и неравенства Коши – Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|,$$

равносильного неравенству

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

Последнее вытекает из неравенства $(x - ty, x - ty) \geqslant 0 \ \forall t$. Например, в вещественном случае получаем

$$t^2 (y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geqslant 0,$$

так что неотрицательность дискриминанта дает неравенство Коши – Буняковского (можно просто подставить $t = (x, y)/(y, y)$).

Для нормы евклидова пространства выполнено *равенство параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

3. Определение. *Евклидово пространство называется гильбертовым (Hilbert space), если оно полно относительно нормы, порожденной скалярным произведением, т. е. всякая фундаментальная последовательность сходится в нем.*

Напомним, что последовательность вектором v_n фундаментальна по норме, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$.

4. Пример. (i) Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ полны.

(ii) Пространство l^2 полно. В самом деле, если последовательность вектором $v^n = (v_1^n, v_2^n, \ldots)$ фундаментальна, то при фиксированном k фундаментальна последовательность чисел v_k^n: $|v_k^n - v_k^m| \leqslant \|v^n - v^m\|$. Значит, существует предел

$$v_k = \lim_{n\to\infty} v_k^n.$$

При этом $v = (v_k) \in l^2$ и $\|v^n - v\| \to 0$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Найдем N с $\|v^n - v^m\| \leqslant \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Это значит, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k^n - v_k^m|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Это равносильно тому, что

$$\sum_{k=1}^{M} |v_k^n - v_k^m|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \forall\, M \geqslant 1.$$

При $m \to \infty$ получаем

$$\sum_{k=1}^{M} |v_k^n - v_k|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \forall\, M \geqslant 1.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k^n - v_k|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Тогда $v^n - v \in l^2$ и потому $v \in l^2$. Кроме того, $\|v^n - v\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$.

(iii) Линейное подпространство l_0^2 в l^2 последовательностей вида

$$(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

не является полным со скалярным произведением из l^2. Например, векторы

$$(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots)$$

образуют фундаментальную последовательность, но предела в l_0^2 у нее нет.

(iv) Пространства $C_2[a,b]$ и $\mathcal{R}_2[a,b]$ не являются полными. Например, можно взять функцию $f(t) = I_{[0,1/2]}(t)$ — индикатор отрезка $[0,1/2]$ в $[0,1]$; легко устроить сходящуюся к ней в $\mathcal{R}_2[0,1]$ последовательность непрерывных функций f_n, равных 0 на $[0, 1/2 - 1/n]$, 1 на $[1/2, 1]$, линейных на $[1/2 - 1/n, 1/2]$. Легко заметить, что среди непрерывных функций у $\{f_n\}$ нет предела, поэтому $C_2[0,1]$ неполно. Но нетрудно проверить, что и $\mathcal{R}_2[0,1]$ неполно (проверьте).

5. Определение. *Евклидово пространство называется сепарабельным, если в нем есть счетная всюду плотная последовательность, т. е. последовательность, присутствующая во всяком шаре положительного радиуса.*

Все указанные выше пространства сепарабельны (проверьте). Вот пример несепарабельного: пространство всех функций на прямой, отличных от нуля лишь в конечном числе точек, со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_t x(t) y(t).$$

Расстояние считается по формуле
$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_t |x(t)-y(t)|^2}.$$
Между точками δ_s, где $\delta_s(t)=1$ при $t=s$ и $\delta_s(t)=0$ при $t\neq s$, взаимные расстояния равны $\sqrt{2}$. Таких точек континуум, поэтому во все шары радиуса $1/2$ с центрами в δ_s не может попадать счетное множество.

6. Определение. *Система взаимно ортогональных векторов единичной длины в евклидовом пространстве E называется ортонормированной.*

Ортонормированная последовательность $\{e_n\}$ называется ортонормированным базисом в E, если для всякого $x\in E$ найдутся числа $\{c_n\}$, для которых
$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$
где ряд сходится по норме в E, т. е.
$$\Big\|x-\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\Big\| \to 0,\ \ N\to\infty.$$

7. Пример. В l^2 базис образуют векторы
$$e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$$
с 1 на месте n.

В комплексном $\mathcal{R}_2[0,2\pi]$ или $C_2[0,2\pi]$ базис образуют функции
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\quad n\in\mathbb{Z}.$$
Очевидно, что они ортонормированы, но базисность не так очевидна, далее проверим.

В вещественном случае надо брать $\sqrt{\pi}^{-1}\sin nx$, $1/\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{\pi}^{-1}\cos nx$, $n\in\mathbb{N}$.

Для сумм $S_N=\sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ имеет место очевидное равенство
$$\|S_N\|^2=\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\Big\|^2=\Big(\sum_{n=1}^{N} c_n e_n,\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\Big)=\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2.$$
Для различных N и N' с $N'>N$ находим
$$\|S_{N'}-S_N\|^2=\Big\|\sum_{n=N+1}^{N'} c_n e_n\Big\|^2=\sum_{n=N+1}^{N'}|c_n|^2.$$
Эти простые равенства лежат в основе большинства основополагающих результатов теории гильбертовых пространств.

Если $e_1,\dots,e_n$ — конечная ортонормированная система, то для всякого вектора $x\in E$ можно взять проекцию
$$P_n x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$$
на линейную оболочку E_n векторов $e_1,\dots,e_n$. Ясно, что
$$(x-P_n x, e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0$$
для всех i, поэтому $x-P_n x$ ортогонален всякому вектору из E_n. Поэтому
$$\|x\|^2=\|x-P_n x\|^2+\|P_n x\|^2.$$

Кроме того, $P_n x$ — ближайший к x элемент в E_n и такой элемент только один: для всякого $y \in E_n$ имеем

$$\|x-y\|^2 = \|x - P_n x + P_n x - y\|^2 = \|x - P_n x\|^2 + \|P_n x - y\|^2,$$

что равно $\|x - P_n x\|^2$ лишь при $y = P_n x$, а в остальных случаях строго больше.

8. Следствие. (неравенство Бесселя) *Для всякой ортонормированной системы $\{e_n\}$ и всякого x*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

В частности, $(x, e_n) \to 0$.

Доказательство очевидно из того, что оценка верна для конечных сумм.

Например, для функции $g \in \mathcal{R}_2[0, 2\pi]$ имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^{2\pi} g(x) e^{-int}\, dt \right|^2 < \infty.$$

Любая конечная или счетная последовательность векторов v_n дает ортонормированную последовательность с той же линейной оболочкой с помощью стандартной *процедуры ортогонализации Грамма – Шмидта*. Для этого при $v_1 \neq 0$ положим $e_1 = v_1/\|v_1\|$, возьмем в $\{v_n\}$ первый линейно независимый с v_1 вектор v_{k_2} и в двумерном пространстве, порожденном e_1 и v_{k_2}, возьмем единичный вектор e_2, ортогональный e_1. Построение продолжается по индукции: если векторы $e_1, \ldots, e_n$ уже построены и их линейная оболочка E_n не совпадает с линейной оболочкой $\{v_n\}$, то возьмем первый вектор $v_{k_{n+1}}$, не попавший в E_n, и в линейном пространстве, порожденном $v_{k_{n+1}}$ и E_n, найдем единичный вектор e_{n+1}, ортогональный E_n. В итоге получится искомая ортонормированная система. В сепарабельном пространстве описанная процедура позволяет легко получить ортонормированный базис.

9. Теорема. *В каждом сепарабельном евклидовом пространстве $E \neq 0$ существует конечный или счетный ортонормированный базис. При этом базис можно выбрать в линейной оболочке произвольного всюду плотного счетного множества.*

Доказательство. Возьмем всюду плотное счетное множество $\{v_n\}$ и применим к нему процесс ортогонализации. Полученная ортонормированная последовательность $\{e_n\}$ — базис. Действительно, для всякого вектора x и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор v_n, что $\|x - v_n\| < \varepsilon$. По построению v_n входит в линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_N$ при некотором $N \leqslant n$. Следовательно,

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i \Big\| \leqslant \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

Тогда так же при всех $k \geqslant N$ имеем

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \Big\| < \varepsilon,$$

т. е. ряд с общим членом $(x, e_i) e_i$ сходится по норме к x. □

10. Следствие. *Для всякого сепарабельного евклидова пространства есть линейное вложение в l^2 над соответствующим полем с сохранением скалярного произведения.*

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис сепарабельного пространства H. Формула

$$j(x) = ((x, e_n))_{n=1}^{\infty},$$

задает линейное отображение в l^2 в силу неравенства Бесселя, причем

$$(j(x), j(y))_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(y, e_n) = (x, y).$$

В самом деле,

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \to x, \quad B_N = \sum_{n=1}^{N} (y, e_n) e_n \to y,$$

поэтому $\sum_{n=1}^{N} (x, e_n)(y, e_n) = (A_N, B_N) \to (x, y)$. Последнее видно из соотношений

$$(x, y) - (A_N, B_N) = (x, y) - (x, B_N) + (x, B_N) - (A_N, B_N),$$

$$|(x, y - B_N)| \leqslant \|x\| \, \|y - B_N\| \to 0,$$

$$|(x - A_N, B_N)| \leqslant \|x - A_N\| \, \|B_N\| \leqslant \|x - A_N\| \, \|y\| \to 0,$$

где применены неравенства Коши – Буняковского и Бесселя. □

Из существования базиса вытекает следующий классический результат об изоморфизме бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств — теорема Рисса–Фишера. Под изоморфизмом здесь понимается существование линейной изометрии (сохраняющей скалярное произведение).

11. Теорема. *Всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство H линейно изометрично пространству l^2 над соответствующим полем.*

Доказательство. В предыдущем следствии имеем $j(H) = l^2$. Действительно, для всякого элемента $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из пространства l^2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ сходится по норме в H, ибо

$$\Big\| \sum_{n=m}^{m+k} x_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=m}^{m+k} |x_n|^2,$$

что дает фундаментальность последовательности частичных сумм. Для суммы x этого ряда имеем $j(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Если бесконечномерное E не является полным, то вложение j даст не все l^2 (иначе E было бы изоморфно l^2 и было бы полным).

12. Следствие. *Всякое неполное сепарабельное евклидово E пространство имеет гильбертово пополнение, т. е. имеется такое гильбертово пространство H, что линейно E изометрично всюду плотному линейному подпространству в H.*

Доказательство. Можно взять $j(E)$ в l^2 — тогда $j(E)$ всюду плотно, ибо содержит базис из l^2. □

Докажем теперь, что $e_n(x) = \exp(inx)/\sqrt{2\pi}$ — базис в $\mathcal{R}_2[0, 2\pi]$. Так как функции из $\mathcal{R}_2[0, 2\pi]$ легко приближаются по норме ступенчатыми, а ступенчатые — кусочно-линейными, то достаточно уметь приближать последние. В этом случае верно чуть больше — приближать можно равномерно. Верен такой факт.

13. Предложение. *Для всякой непрерывной комплексной функции f на $[0,2\pi]$ с $f(0)=f(2\pi)$, имеющей кусочно-непрерывную производную, ряд*

$$(2\pi)^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f,e_n)_2\exp(inx)$$

сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,2\pi]$.

Доказательство. Этот факт не является тривиальным, ибо верен не для всех непрерывных функций. Более того, как ни странно, тривиальной является равномерная сходимость ряда, ибо по формуле интегрирования по частям

$$(f,e_n)_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\,dt=\frac{1}{in\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-int}\,dt$$

при $n\neq 0$. Значит,

$$|(f,e_n)_2|=\frac{1}{n}|(f',e_n)_2|\leqslant\frac{1}{n^2}+|(f',e_n)_2|^2,$$

откуда с учетом неравенства Бесселя для функции $f'\in\mathcal{R}_2[0,2\pi]$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда из $(f,e_n)_2e_n$.

Однако неочевидным оказывается то, что ряд сходится в каждой точке x_0 именно к $f(x_0)$. Проверим это. Достаточно рассмотреть случай $x_0=0$, ибо, продолжив f периодически на всю прямую, для функции $g(x)=f(x_0+x)$ имеем

$$\int_0^{2\pi}g(t)e^{-int}\,dt=\int_0^{2\pi}f(x_0+t)e^{-int}\,dt=e^{inx_0}\int_{x_0}^{x_0+2\pi}f(s)e^{-ins}\,ds=$$
$$=e^{inx_0}\int_0^{2\pi}f(s)e^{-ins}\,ds$$

в силу периодичности. Таким образом, $(g,e_n)_2=e^{inx_0}(f,e_n)_2$. Далее, можно считать, что $f(0)=0$, вычитая постоянную.

Итак, в случае $f(0)=0$ надо проверить, что $\sum_{n=-N}^{N}(f,e_n)_2\to 0$. Левая часть имеет вид

$$\sum_{n=-N}^{N}(f,e_n)_2=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)\sum_{n=-N}^{N}e^{-int}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)e^{iNt}\frac{1-e^{-it(2N+1)}}{1-e^{-it}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{1-e^{-it}}(e^{iNt}-e^{-it(N+1)})\,dt=$$
$$=(h,e_{-N})_2-(h,e_{N+1})_2.$$

что стремится к нулю при $N\to\infty$, поскольку функция

$$h(t)=\frac{f(t)}{1-e^{-it}}$$

входит в $\mathcal{R}_2[0,2\pi]$, ибо она непрерывна и ограничена на $(0,2\pi)$; последнее вытекает из ограниченности $f(t)/t=(f(t)-f(0))/t$ и оценки $1/|1-e^{it}|\leqslant c/t$ в окрестности нуля. $\square$

Как и всякое евклидово пространство, $\mathcal{R}_2[0,2\pi]$ (или $C_2[0,2\pi]$) имеет гильбертово пополнение. Однако это пополнение $L_2[0,2\pi]$ можно реализовать не просто как абстрактное пополнение, но именно как пространство функций на $[0,2\pi]$ — функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу.