Алгебра, семинар 18–22 января: A_5

1. **a)** Сколько существует действий группы $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
b) Докажите, что для каждого элемента a конечного множества X, на котором действует конечная группа G, выполнено $|\text{орбита } a| \cdot |\text{стабилизатор } a| = |G|$.

2. **a)** Пусть $a^G = \{gag^{-1} \,|\, g \in G\}$ и $a_G = \{g \in G \,|\, ag = ga\}$ – класс сопряженности и централизатор элемента $a \in G$, тогда $|G| = |a^G| \cdot |a_G|$.
b) Подгруппа $N \subset G$ индекса 2 нормальна, и для каждого $a \in N$ класс сопряженности a^N совпадает с a^G при условии $a_G \not\subset N$, а иначе содержит вдвое меньше элементов, чем a^G.

3. **a)** Опишите классы сопряженности в A_5.
b) Докажите, что A_5 проста.

4. **a)** Докажите, что перестановки $(1, 2, 3, 4, 5)$ и $((2, 5), (3, 4))$ порождают в A_5 подгруппу, изоморфную D_{10}. Сколько у нее сопряженных подгрупп?
b) Докажите, что любая пара перестановок порядка 2 в A_5 порождает подгруппу, изоморфную V_4, S_3 или D_{10}. Сколько у каждой из них сопряженных подгрупп?
c) Докажите, что любая пара перестановок порядков 3 и 5 в A_5 порождает A_5.
d) Докажите, что любая пара перестановок порядков 2 и 3 в A_5 порождает подгруппу, изоморфную S_3, A_4 или A_5. Сколько у каждой из них сопряженных подгрупп?
e) Докажите, что любая пара перестановок порядков 2 и 5 в A_5 порождает подгруппу, изоморфную D_{10} или A_5.

5. **a)** Пусть G – группа порядка n, и $H \subset G^k = \underbrace{G \times \ldots \times G}_{k}$ состоит из всех наборов $(x_1, \ldots, x_k)$, таких что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = e$. Найдите $|H|$ и докажите, что H сохраняется при действии группы $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ на G^k циклическими перестановками координат.
b) Докажите теорему Коши: если простое число p делит порядок группы G, то в G есть элемент порядка p. (Подсказка: докажите от противного, что некоторые из орбит вышеописанного действия при $k = p$ состоят из одного элемента.)
c) Докажите, что в прошлой задаче описаны все подгруппы группы A_5, кроме циклических.

6.$^{\times}$ Докажите, что группа Q_8 не вкладывается в S_n при $n < 8$.