**Алгебра, листок 6 (необязательный, крайний срок сдачи – 2 февраля)**

Напомним, что через $M_n(R)$ обозначается кольцо матриц рамера $n\times n$ над кольцом $R$, через $GL(n,R)$ – его мультипликативная группа, а через $SL(n,R)$ – ее подгруппа, состоящая из матриц с единичным определителем.

**1.** **a)** Отождествите $GL(n,\mathbb{K})$ с группой линейных преобразований векторного пространства размерности $n$ над полем $\mathbb{K}$, опишите ее центр $Z$ (т.е. множетво всех элементов, коммутирующих с каждым элементом нруппы).
**b)** Покажите, что $SL(n,\mathbb{K})$ и $Z$ – нормальные подгруппы $GL(n,\mathbb{K})$, причем $GL(n,\mathbb{K})$ может быть как изоморфна, так и не изоморфна их прямому произведению.
**c)** Покажите, что кольцо $M_n(\mathbb{K})$ не имеет нетривиальных (двухсторонних) идеалов.

Обозначим факторы $GL(n,R)/Z$ и $SL(n,R)/Z$ через $PGL(n,R)$ и $PSL(n,R)$ соответственно.

**2.** **a)** *Проективное пространство* $\mathbb{P}V$ размерности $k$ над полем $\mathbb{K}$ – множество одномерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $k+1$ над $\mathbb{K}$. Его преобразование называется проективным, если индуцируется линейным преобразованием $V$. Отождествите $PGL(k+1,\mathbb{K})$ с группой проективных преобразований $\mathbb{P}\mathbb{K}^k$.
**b)** Установите изоморфизм между группами $PGL(2,\mathbb{F}_q)$ и $S_{q+1}$ при $q=2,3$.
**c)** Сколько элементов в $PGL(k+1,\mathbb{K})$?
**d)** Докажите, что проективное преобразование прямой $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ задается образами трех точек.
**e)** Установите изоморфизм между группой преобразований проективной прямой $PGL(2,\mathbb{K})$ и группой *дробно-линейных преобразований* $f:\mathbb{K}\cup\{\infty\}\to\mathbb{K}\cup\{\infty\}$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.
**f)** Структурой проективной прямой $\mathbb{F}_n\mathbb{P}^1$ на множестве $\{0,1,\ldots,n\}$ называется биекция $f:\{0,1,\ldots,n\}\to\mathbb{F}_n\mathbb{P}^1$. Структуры $f$ и $g$ называются одинаковыми, если $fg^{-1}$ – проективное преобразование. Сколько разных структур проективной прямой на множестве $\{0,1,\ldots,n\}$?
**g)** Пусть $f:S_6\to S_6$ – гомоморфизм, переводящий перестановку множества $\{0,1,2,3,4,5\}$ в соответствующую перестановку шести возможных структур проективной прямой $\mathbb{F}_5\mathbb{P}^1$ на этом множестве. Найдите $f\left((12)(34)(56)\right)$.
**h)** Докажиете, что $f$ – это автоморфизм $S_6$, и что он внешний (т.е. не внутренний).
**i)**$^\times$ Докажите, что все остальные автоморфизмы симметрических групп – внутренние.

Напомним, что через $SO(n,\mathbb{F})$ обозначается группа преобразований пространства $\mathbb{F}^n$, принадлежащих $SL(n,\mathbb{F})$ и сохраняющих евклидову норму $n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_i x_i^2$.

**3.** **a)** Покажите, что $SO(n,\mathbb{F})$ изоморфна группе ортогональных матриц $\{A\,|\,AA^T=E\}$.
**b)** Покажите, что действие кватернионов на себе внутренними автоморфизмами сохраняет пространство кватернионов без вещественной части со стандартной нормой. Постройте с помощью этого замечания сюръекцию $\mathbb{H}^\times\to SO(3,\mathbb{R})$ и найдите ее ядро.
**c)** Покажите, что действие $GL(2,\mathbb{K})$ на себе внутренними автоморфизмами сохраняет пространство бесследных матриц с нормой $n(X)=\mathrm{tr}(X^2)$. Для полей $\mathbb{K}$, в которых есть $\sqrt{-1}$, постройте с помощью этого замечания изоморфизм $PSL(2,\mathbb{K})\to SO(3,\mathbb{K})$.
**d)** Покажите, что вращения додекаэдра содержатся в $SO(3,\mathbb{Z}[\frac{1}{2},\sqrt{5}])$, постройте сюръекцию колец $\mathbb{Z}[\frac{1}{2},\sqrt{5}]\to\mathbb{F}_5$, и с ее помощью вложите группу симметрий додекаэдра в $SO(3,\mathbb{F}_5)$.
**e)** Отождествив симметрии додекаэдра с $A_5$, постройте изоморфизмы $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ с $A_5$ и $PGL(2,\mathbb{F}_5)$ с $S_5$.