

## Алгебра, семинар 25–29 января: решетки

1.
  - a) Найдите взаимные базисы для решетки  $\mathbb{Z}^2$  и ее подрешетки, порожденной векторами  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ .
  - b) Та же задача для векторов  $(2, 3)$  и  $(3, 2)$ .
  - c) Придумайте матричную запись вычислений из предыдущих пунктов, аналогичную методу Гаусса обращения матриц.
  - d) Найдите взаимные базисы для решетки  $\mathbb{Z}^2$  и ее подрешетки, порожденной векторами  $(9, 0)$  и  $(6, 4)$ .
  - e) Та же задача для векторов  $(15, 21)$  и  $(20, 14)$ .
  - f) Та же задача для решетки  $\mathbb{Z}^3$  и векторов  $(1, 2, 3)$ ,  $(4, 5, 6)$  и  $(7, 8, 9)$ .
  - g) Та же задача для векторов  $(6, 3, 6)$ ,  $(3, 6, 9)$  и  $(6, 6, 10)$ .
  
2.
  - a) Опишите фактор-группы решеток прошлой задачи по указанным подрешеткам.
  - b) Какие из групп  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ,  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ,  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ ,  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$  изоморфны?
  - c) Представьте группу  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$  как фактор решетки минимально возможной размерности.
  - d) Классифицируйте абелевы группы порядка 48.
  - e) Сколько существует абелевых групп порядка 10000?
  
3.
  - a) Докажите, что каждая подгруппа абелевой группы нормальна. b)  $\times$  Верно ли обратное?
  - c) Докажите, что в абелевой группе порядка  $n$  найдется подгруппа каждого порядка, делящего  $n$ . d)  $\times$  Верно ли это для неабелевых групп?