КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция №4: Гармонический осциллятор и соотношение неопределенности

А.Г. Семенов

I. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В первой части данной лекции мы подробно рассмотрим гармонический осциллятор. Данная система представляет собой частицу в квадратичном потенциале с Гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}, \tag{1}$$

откуда следует, что стационарное уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$-\frac{1}{2m}\psi''(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x) = E\psi(x). \tag{2}$$

Для того, что бы найти собственные значения E_n и волновые функции собственных состояний Гамильтониана $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ необходимо решить данное уравнение с условием обращения волновой функции в ноль при $x \to \pm\infty$. Однако мы не будем решать данное уравнение явно и найдем все состояния с использованием алгебраического подхода. Для этого введем операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} + i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x}, \tag{3}$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x}. \tag{4}$$

Из их определения следует тот факт, что они коммутируют на единицу $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Гамильтониан может быть записан через эти операторы как

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Из этого представления и из коммутационных соотношений легко построить спектр и все собственные состояния Гамильтониана. Заметим, что если $|\psi\rangle$ - собственное состояние Гамильтониана с энергией E, то $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ также является собственным состоянием

Гамильтониана с энергией $E + \omega$, а $\hat{a}|\psi\rangle$ есть собственное состояния Гамильтониана с энергией $E - \omega$. Рассмотрим какое-то собственное состояние и будем действовать на него оператором уничтожения до тех пор, пока не получим 0 (в силу ограниченности собственных значений снизу это с необходимостью произойдет). Это означает, что состояние отвечающее наименьшему собственному значению Гамильтониана, или, иными словами, основное состояние системы удовлетворяет условию $\hat{a}|0\rangle = 0$. Вектор $|0\rangle$ еще называют вакуумным вектором. В координатном представлении уравнение на волновую функцию основного состояния системы имеет вид

$$\psi_0'(x) + m\omega x\psi_0(x) = 0. \tag{6}$$

Данное уравнение легко решается, что дает

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}. \tag{7}$$

Оно отвечает собственному значению $E_0 = \omega/2$. Все остальные состояния строятся действием оператора рождения

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle \tag{8}$$

и отвечают энергии $E_n = (n+1/2)\omega$. В координатном представлении волновые функции данных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{-i}{\sqrt{2m\omega}}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial x} - m\omega x\right)^n e^{-\frac{m\omega}{2}x^2} \tag{9}$$

Очень часто используют иную запись для волновых функций гармонического осциллятора, которая отличается фазовым множителем. Волновые функции выражаются через полиномы Эрмита

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}, \tag{10}$$

которые определены как

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}. \tag{11}$$

Известно, что они образуют полную систему функций на пространстве $\mathbb{L}^2_\rho$ с $\rho = e^{-\xi^2}$, причем

$$\int d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi)H_m(\xi) = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}. \tag{12}$$

II. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

На предыдущих лекциях мы обсуждали тот факт, что даже в случае, когда мы точно знаем квантовомеханическое состояния в котором находится рассматриваемая нами система, мы не можем достоверно предсказать результат измерения какой-либо наблюдаемой (за исключением тех случаев, когда система находится в собственном состоянии соответствующей наблюдаемой). Все, что мы можем предсказать, это лишь вероятности того или иного исхода. Например если мы измеряем наблюдаемую $\hat{A}$ с собственными состояниями $\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$, то при измерении состояния $|\psi\rangle$ с вероятностью $p_n = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$ прибор покажет a_n. При проведении множества измерений мы можем усреднить все полученные показания и получить в среднем

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_n a_n p_n = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle. \tag{13}$$

Также мы можем вычислить дисперсию или, иными словами, то, насколько сильно разбросаны полученные в результате измерения значения

$$\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2 = \sum_n a_n^2 p_n - \langle\hat{A}\rangle^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2. \tag{14}$$

При этом, данный разброс является не погрешностью метода проводимого нами измерения, а внутренним свойством квантовомеханического состояния системы. Иными словами, эта величина является мерой неопределенности той или иной наблюдаемой для данного состояния системы. Давайте зададимся следующим вопросом. Допустим, что у нас есть две наблюдаемые $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Возможно ли приготовить систему в таком состоянии, чтобы неопределенности обеих наблюдаемых были сколь угодно малы? Ответ на данный вопрос дает соотношение неопределенности. Пусть для простоты средние значения операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ равны нулю. Составим оператор $\hat{C} = \hat{A} + i\lambda\hat{B}$. В силу неотрицательности нормы любого вектора из $\mathcal{H}$ имеем

$$\langle\hat{C}^\dagger\hat{C}\rangle = \langle\psi|\hat{C}^\dagger\hat{C}|\psi\rangle \geq 0 \tag{15}$$

при любом λ. Подставляя получим

$$\langle\hat{A}^2\rangle + \lambda\langle i[\hat{A},\hat{B}]\rangle + \lambda\langle\hat{B}^2\rangle \geq 0. \tag{16}$$

Для того, чтобы данное неравенство выполнялось при любом λ необходимо, чтобы дискриминант квадратного уравнения был отрицательным, что приводит к неравенству

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2. \tag{17}$$

Иными словами, если две наблюдаемые не коммутируют друг с другом, то мы не можем их одновременно измерить сколь угодно точно. Например, рассмотрим координату $\hat{x}$ и импульс $\hat{p}$. Из соотношения неопределенности следует, что

$$\langle \hat{p}^2 \rangle \langle \hat{x}^2 \rangle \geq \frac{1}{4}. \tag{18}$$

Это означает тот факт, что не существует таких состояний системы, при которых импульс и координата одновременно заданы сколь угодно точно. Это существенно отличает квантовомеханическое описание от классического, при котором обе величины заданы точно.

III. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Соотношение неопределенности позволяет качественно понять причину, по которой энергия основного состояния строго больше нуля. Для этого достаточно записать её в виде

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle \hat{x}^2 \rangle, \tag{19}$$

после чего становится очевидно, что она не может обратиться в ноль, поскольку это бы означало одновременное обращение в ноль неопределенностей координаты и импульса. Давайте ради интереса вычислим неопределенности координаты и импульса в основном состоянии гармонического осциллятора. Для этого воспользуемся координатным представлением. В этом случае

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int dx x^2 |\psi_0(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} \int dx x^2 e^{-m\omega x^2} = \frac{1}{2m\omega}, \tag{20}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = -\int dx x^2 \psi_0^*(x) \psi_0''(x) = -\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} \int dx \left(m^2\omega^2 x^2 - m\omega \right) e^{-m\omega x^2} = \frac{m\omega}{2}. \tag{21}$$

Оказывается, основное состояние гармонического осциллятора минимизирует соотношение неопределенности. Более того, в этом случае средняя кинетическая и средняя потенциальная энергия системы равны между собой и равны $\omega/4$. Существуют ли иные состояния, минимизирующие соотношение неопределенности? Оказывается существуют. В этом легко убедиться заметив, что в качестве таких состояний можно рассматривать основные состояния гармонических осцилляторов с иными параметрами m, ω, а также со смещенным положением равновесия $\hat{p} \to \hat{x} + x_0$, или движущихся с определенной скоростью $\hat{p} \to \hat{p} + mv$. Состояния, минимизирующие соотношение неопределенности называются когерентными.