

## Дискретная математика

### Семинар 8

ВШЭ, факультет математики

первый курс

1. Дайте интерпретацию коэффициенту при  $q^m s^n$  в бесконечном произведении  $(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^3) \dots$ .

2. Всякое число может быть единственным образом записано в десятичной системе счисления. Используя это утверждение, докажите, что

$$(1 + s + s^2 + \dots + s^9)(1 + s^{10} + \dots + s^{90})(1 + s^{100} + \dots + s^{900}) \dots = \frac{1}{1 - s}.$$

3. Найдите производящую функцию для числа симметричных (самосопряженных) разбиений.

4. Рассмотрим кольцо многочленов от бесконечного набора переменных, в котором переменным приписан натуральный вес, причем число переменных веса  $i$  конечно для любого  $i$ . Обозначим это число через  $q_i$ . Выпишите производящую функцию для последовательности размерностей пространств взвешенно однородных многочленов веса  $n$ . Разберите сначала случай  $q_i = 1$  при всех  $i$ .

5. Докажите, что число разбиений числа  $n$  на части, не делящиеся на  $m$ , равно числу тех его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более, чем  $m - 1$  раз.

6. Докажите тождество

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^{2n-1})^{-1} = \prod_{n \geq 1} (1 + x^n).$$

7. Докажите тождество Гаусса

$$\frac{(1 - s^2)(1 - s^4)(1 - s^6)}{(1 - s)(1 - s^3)(1 - s^5) \dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$$