Листок 9. Функциональные последовательности и ряды

Анализ, 1 курс, **31.01.2016**

9◇1 Докажите, что последовательность ограниченных функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ на множестве X равномерно сходится к нулю, если и только если найдется такая числовая последовательность $\alpha_n \to 0$, что $|f_n(x)| < \alpha_n$ для всех $x \in X$.

9◇2 Приведите пример ряда из неотрицательных функций на отрезке $[0; 1]$, такого что
а) функции разрывные, ряд равномерно сходится к непрерывной функции;
б) функции непрерывны, ряд сходится к разрывной функции;
в) функции непрерывны, ряд сходится к непрерывной функции неравномерно.

9◇3 Пусть функции f_n равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$ и равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к $f(x)$. Доказать, что f также равномерно непрерывная.

9◇4 Приведите примеры степенных рядов с радиусом сходимости $R > 0$, которые сходятся на $[-R; R]$, $(-R; R]$, $(-R; R)$.

9◇5 Пусть степенные ряды $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ имеют радиусы сходимости $r_1 \neq r_2$.
а) Докажите, что ряд $\sum (a_n + b_n) x^n$ имеет радиус сходимости $\min(r_1; r_2)$;
б) Что можно сказать о радиусе сходимости ряда $\sum (a_n + b_n) x^n$ при $r_1 = r_2$?
в) Докажите, что ряд $\sum a_n b_n x^n$ имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1 r_2$.

9◇6 Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится равномерно на некотором множестве. Докажите, что расстановкой скобок этот ряд можно преобразовать в ряд, удовлетворяющий признаку Вейерштрасса.

9◇7 Пусть $a_n \to \infty$ и пусть ряд $\sum \frac{1}{a_n}$ сходится. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{x - a_n}$ сходится равномерно на любом компакте, не содержащем точек a_n.

9◇8 Докажите, что если последовательность $a_n(x)$ неотрицательных ограниченных монотонных возрастающих функций $a_n : [0; 1] \to \mathbb{R}$ монотонно поточечно сходится к нулю, то ряд $\sum (-1)^n a_n(x)$ равномерно сходится.

9◇9 Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, ряд Маклорена которой **а*)** расходится в каждой точке, кроме нуля; **б)** сходится всюду, но не к функции $f(x)$.

9◇10 Степенной ряд $\sum a_n x^n$ имеет периодические с некоторого места коэффициенты. Докажите, что на некотором невырожденном промежутке этот ряд равномерно сходится к рациональной функции $P(x)/Q(x)$ (где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены). Верно ли обратное утверждение?

9◇11 Пусть $f'(x)$ существует и непрерывна на $[a, b+1]$. Доказать, что последовательность $n(f(x + 1/n) - f(x))$ равномерно на $[a, b]$ сходится к $f'(x)$.

9◇12* Докажите, что функция $f(x) = \sum a_n x^n$ является рациональной, если и только если для некоторого ℓ найдутся вещественные числа $b_0, b_1, \ldots, b_\ell$, не равные одновременно нулю, такие, что для всех достаточно больших m справедливо тождество $b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + \ldots + b_\ell a_{m+\ell} = 0$.