Листок 10. Интегралы

Анализ, 1 курс, **15.02.2016**

10◇1 Посчитать интегралы (обязательная задача!): $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}$,

$$\int e^{|x|}\,dx,\ \int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+1},\ \int \frac{(2-x)^2\,dx}{2-x^2},\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},\ \int \frac{dx}{1+\sin x},\ \int \operatorname{tg}^2 x\,dx$$

10◇2 В параболическую тарелку (параболоид вращения в $\mathbb{R}^3$ с вертикальной осью) высоты h и радиуса R подали обед. Сколько супа в неё влезет?

10◇3 По трубе радиуса R течёт нефть, причём скорость течения растет прямо пропорциональна расстоянию от стенки трубы, достигая максимального значения v_0 м/сек в середине трубы. Какова пропускная способность этой трубы?

10◇4 Момент вращения отрезка $I=[0,1]$ с непостоянной плотностью $p(x)=x^s$ (где $s>0$) относительно точки $a\in\mathbb{R}$ вычисляется по формуле $J_a=\displaystyle\int_0^1 p(x)(x-a)^2dx$. Найдите минимальное значение момента вращения J_a и соответствующую точку a^*.

10◇5 Винт вертолёта, взлетающего с постоянной скоростью v, вращается с постоянной угловой скоростью w. По лопасти винта от его оси бежит колорадский жук с постоянной скоростью u. Найдите длину траектории колорадского жука за один полный оборот винта вертолёта, если в начальный момент времени он сидел на оси винта.

10◇6 Найдите работу силы Архимеда при погружении золотого шара радиуса R в ванну с водой до середины шара. (Примечание: Требуется работа, а не сила!)

10◇7 Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса ρ, диаметр которого находится на поверхности воды.

10◇8 Циклоидой называется траектория фиксированной точки на окружности радиуса R катящейся без скольжения по прямой. Найдите параметризацию циклоиды и длину её дуги, отвечающей полному обороту окружности.

10◇9 Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объём пара в два раза, считая, что температура пара остаётся постоянной?

10◇10 Бокал в форме поверхности вращения радиуса $R(z)=z^{2/3}$ на высоте z ото дна наполняют из постепенно иссякаемого источника, скорость истечения из которого равна $e^{-t}\cos^2 t$. До какой высоты H сможет наполниться бокал?

10◇11 Докажите вторую теорему Гульдена: объём тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади фигуры S на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.