

Дискретная математика
Семинар 9, подготовка к экзамену
ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Для $a = 0, 1, 2$, найдите сумму биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i \equiv a \pmod{3}} \binom{n}{i}.$$

2. Докажите, что количество последовательностей a_1, \dots, a_n целых чисел, таких что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$, равно n -ому числу Каталана.

Пример. $n = 3$: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$.

3. Экспоненциальной производящей функцией последовательности чисел a_0, a_1, \dots называется ряд $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{s^n}{n!}$. Пусть $f(s), g(s)$ – эпф последовательностей a_n и b_n , а произведение $f(s)g(s)$ является эпф последовательности c_n . Выразите c_n через a_n и b_n .

4. Найдите производящую функцию и линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для последовательности, заданной квазимногочленом:

$$a_n = (2n + 2) \cdot 3^n - (n^2 + 3) \cdot 2^n.$$

5. Решите рекуррентное соотношение $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

6. Соответствие между разбиениями на различные слагаемые и разбиениями на нечётные слагаемые: Каждую часть разбиения нужно поделить на максимально возможную степень двойки. Частное будет нечётным числом и нужно включить это число в новое разбиение столько раз, каков делитель. Докажите, что это соответствие биективно, построив обратное соответствие.

7. Вычислите $\binom{n}{2}_q$ при $q = 2$.