

## ЛИСТОК 11. ИНТЕГРАЛЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 22.02.2016

11◇1 Посчитайте интегралы (обязательная задача!):  $\int_0^2 |x-1| dx$ ,  $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ ,  $\int_0^1 \arccos x dx$ ,  
 $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$ ,  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$ ,  $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$ ,  $\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{x^4+1} dx$

11◇2 Пусть функция  $f$  интегрируема на любом конечном промежутке и  $F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt$ .

а) Докажите, что  $F_\delta \in C(\mathbb{R})$  при каждом  $\delta > 0$  и  $F_\delta \in C^1(\mathbb{R})$ , если  $f \in C(\mathbb{R})$ .

б) Если  $f \in C(\mathbb{R})$ , то при  $\delta_n \rightarrow 0$  последовательность  $F_{\delta_n}$  равномерно сходится к  $f$  на каждом конечном промежутке.

11◇3 Докажите, что каждая функция  $f \in C^1[a, b]$  может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций из  $C_1$ .

11◇4 Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2n^2 + n - k + 1}{n^3 + k^3 + nk + 5}$ .

11◇5 Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонная. Докажите, что  $\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

11◇6 Докажите, что  $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$  при  $f, g \in C[a, b]$ .

11◇7 а) Докажите, что  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  при  $f \in C[0, 1]$ .

б) Посчитайте  $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ .

11◇8 Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x) dx\right)$  при  $f \in C[0, 1]$ ,  $f(x) > 0$ .

11◇9 Докажите равенство  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt$ .

11◇10 Пусть  $f \in C^1[a, b]$  и  $f(a) = 0$ . Докажите, что  $\|f\|_C^2 \leq (b-a) \int_a^b |f'(x)|^2 dx$ .

11◇11 Пусть  $f \in C[-a, a]$  — чётная функция. Докажите, что  $\int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{1 + e^x} = \int_0^a f(x) dx$ .

11◇12 Пусть  $f \in C^1[a, b]$  и  $x \in (a, b)$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(f\left(x + \frac{k}{n^2 + k^2}\right) - f(x)\right) = f'(x) \ln \sqrt{2}$ .

11◇13\* Вычислите интегралы  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  и  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  при  $n \in \mathbb{Z}^+$ .