Задачи по группам и алгебрам Ли, семестр 2, листок 3. Категория $\mathcal{O}$ и формула Вейля.

Для получения оценки “10” по данному листку надо сдать 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Следующий листок будет выдан 29 февраля.

В этом листке $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$. Зафиксируем стандатный базис e_{ij} из матричных единиц в $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$. Определим подалгебры $\mathfrak{h}$ как линейную оболочку элементов e_{ii} (это абелева подалгебра, называемая *подалгеброй Картана*), $\mathfrak{n}_-$ – как линейную оболочку элементов e_{ij}, $i>j$, $\mathfrak{n}_+$ – как линейную оболочку элементов e_{ij}, $i<j$. Имеет место разложение в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$.

Категорией $\mathcal{O}$ называется категория $\mathfrak{g}$-модулей V, удовлетворяющих следующим свойствам:

(1) V конечно порожден как $U(\mathfrak{g})$-модуль.

(2) Подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ действует на V полупросто, т.е. $V=\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}V(\lambda)$, где

$$\forall v\in V(\lambda)\ \forall x\in\mathfrak{h}\ xv=\lambda(x)v.$$

(3) Подалгебра $\mathfrak{n}_+$ действует на V локально нильпотентно, т.е.

$$\forall v\in V\ \exists N\in\mathbb{Z}_{>0}\ \forall x_1,\dots,x_N\in\mathfrak{n}_+\ x_1\cdot\ldots\cdot x_Nv=0.$$

Определим *решетку весов* $X\subset\mathfrak{h}^*$ как множество таких $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, что $\lambda_i:=\lambda(e_{ii})\in\mathbb{Z}$. Определим *решетку корней* $Y\subset\mathfrak{h}^*$ как решетку, порожденную собственными значениями присоединенного действия $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{g}$. Нам понадобится полугруппа Y_+ *положительных* элементов в Y, определяемая как адитивная полугруппа, порожденная всеми собственными значениями присоединенного действия $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{n}_+$. Нам также понадобится полугруппа положительных элементов в X (доминантных весов), $X_+:=\{\lambda\in X\mid\lambda_i\geq\lambda_{i+1},\ i=1,2,\dots,n-1\}$.

Частичный порядок на $\mathfrak{h}^*$ задается следующим образом: $\lambda\geq\mu$ если $\lambda-\mu\in Y_+$.

1. а) Опишите явно Y и Y_+. **б)** Покажите, что частичный порядок на $\mathfrak{h}^*$ определен корректно.

2. а) Верно ли, что всякий конечномерный $\mathfrak{gl}_n$-модуль лежит в категории $\mathcal{O}$? Докажите, что это так для конечномерных $\mathfrak{sl}_n$-модулей. **б)** Докажите, что для всякого модуля V из категории $\mathcal{O}$ все весовые подпространства $V(\lambda)$ конечномерны. **в)** Докажите, что для всякого модуля V из категории $\mathcal{O}$ множество таких $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, что $V(\lambda)\neq0$, ограничено сверху относительно частичного порядка на $\mathfrak{h}^*$ конечным числом элементов из $\mathfrak{h}^*$.

Нам в дальнейшем понадобится пополненная версия категории $\mathcal{O}$, в которой условие конечной порожденности заменено на условия 2б)-2в). Начиная с этого момента, мы будем работать именно с этой (пополненной) категорией, и будем именно ее обозначать символом $\mathcal{O}$ (но в этом листке на самом деле это пока еще не очень важно).

3. а) Пусть V – $\mathfrak{g}$-модуль из категории $\mathcal{O}$. *Характером* модуля V называется формальный ряд от переменных $t_1,\dots,t_n$, определяемый следующим образом: $\chi_V(t):=\sum\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}t^\lambda\dim V(\lambda)$, где для $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ символом t^λ обозначается $t_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot t_n^{\lambda_n}$. Докажите, что для точной последовательности $0\to U\to V\to W\to0$ имеем $\chi_V(t)=\chi_U(t)+\chi_W(t)$. **б)** Докажите, что тензорное произведение модулей из категории $\mathcal{O}$ снова лежит в категории $\mathcal{O}$ и $\chi_{U\otimes V}(t)=\chi_U(t)\chi_V(t)$.

4. а) На алгебре Ли $\mathfrak{n}_-$ действует алгебра Ли $\mathfrak{h}$ операторами $\operatorname{ad}x$, $x\in\mathfrak{h}$. Докажите, что это действие однозначно продолжается до действия дифференцированиями на симметрической алгебре $S(\mathfrak{n}_-)$ и на $U(\mathfrak{n}_-)$. **б)** Докажите, что это действие полупросто и весовые пространства конечномерны. **в)** Докажите, что характер $S(\mathfrak{n}_-)$ равен $\frac{1}{\prod\limits_{i>j}(1-t_it_j^{-1})}$. *Указание:* найдите все совместные собственные значения $\mathfrak{h}$ на пространстве $\mathfrak{n}_-$. **г)** Докажите, что характер $U(\mathfrak{n}_-)$ тоже равен $\frac{1}{\prod\limits_{i>j}(1-t_it_j^{-1})}$. *Указание:* воспользуйтесь теоремой ПБВ.

5. а) Докажите, что модуль Верма лежит в категории $\mathcal{O}$. **б)** Найдите характер модуля Верма со старшим весом λ. *Указание:* он равен произведению t^λ на характер $U(\mathfrak{n}_-)$.

6. а) Докажите, что модуль Верма имеет единственный наибольший (по включению) собственный подмодуль. *Указание:* это сумма всех подмодулей, не содержащих старшего вектора. **б)** Таким образом, определен наименьший фактормодуль модуля Верма. Докажите, что если минимальный фактор модуля Верма M_λ конечномерен то $\lambda \in X_+ + \mathbb{C}E$, где $E = (1,\dots,1)$. *Указание:* для каждой из sl_2-троек $e = e_{ij}, h = e_{ii}-e_{jj}, f = e_{ji}$, представление алгебры Ли sl_2, порожденное из старшего вектора, должно быть конечномерным. **в*)** Докажите, что верно и обратное.

7. а) Докажите, что всякий неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль из категории $\mathcal{O}$ является гомоморфным образом некоторого модуля Верма M_λ. *Указание:* в любом таком модуле есть особый вектор. **б)** Докажите, что все неприводимые модули из категории $\mathcal{O}$ с данным старшим весом изоморфны. **в*)** Докажите, что всякое конечномерное неприводимое представление *группы* Ли $G = GL_n$ имеет вид V_λ, где $\lambda \in X_+$.

8. а) Докажите, что центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ действует на модулях из категории $\mathcal{O}$, сохраняя весовое разложение. **б)** Докажите, что в любом модуле из категории $\mathcal{O}$ совместные корневые пространства относительно элементов $ZU(\mathfrak{g})$ являются подмодулями. Таким образом, всякий модуль из категории $\mathcal{O}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g}$-подмодулей по совместным собственным значениям элементов $ZU(\mathfrak{g})$. **в)** Докажите, что если на модулях U и V какой-нибудь центральный элемент $U(\mathfrak{g})$ действует с различными собственными значениями, то между модулями U и V не существует нетривиальных гомоморфизмов и расширений.

Напомним, что в прошлом листке был определен инъективный гомоморфизм Хариш-Чандры $\psi : ZU(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$, такой, что для всякого $z \in ZU(\mathfrak{g})$ значение $\psi(z)(\lambda)$ есть собственное значение z на модуле M_λ. Таким образом, категория $\mathcal{O}$ раскладывается по совместным собственным значениям элементов центра $U(\mathfrak{g})$ в прямую сумму подкатегорий. Прямое слагаемое $\mathcal{O}_\lambda$ (где $\lambda \in \mathfrak{h}^*$) по определению состоит из таких модулей из категории $\mathcal{O}$, на которых всякий элемент $z \in ZU(\mathfrak{g})$ действует (возможно, не полупросто) с единственным собственным значением $\psi(z)(\lambda)$ (в частности, $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\sigma\cdot\lambda}$ для любого $\sigma \in S_n$).

9. а) Покажите, что модули $M_{\sigma\cdot\lambda}$, где $\sigma \in S_n$, лежат в категории $\mathcal{O}_\lambda$. **б)** Покажите, что особые векторы в $\mathfrak{g}$-модуле из категории $\mathcal{O}_\lambda$ не могут иметь весов, отличных от $\sigma\cdot\lambda$ для $\sigma \in S_n$. **в)** Докажите, что для таких λ, что $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$, всякий объект в категории $\mathcal{O}_\lambda$ есть прямая сумма нескольких копий $M_{\sigma\cdot\lambda}$. В частности, всякий неразложимый объект этой категории неприводим, т.е. категория *полупроста*. **г*)** В каких еще случаях можно утверждать, что категория $\mathcal{O}_\lambda$ полупроста?

10. а) Докажите, что всякий максимальный (относительно частичного порядка) вес, встречающийся в $\mathfrak{g}$-модуле V из категории $\mathcal{O}_\lambda$, равен $\sigma\cdot\lambda$ для некоторого $\sigma \in S_n$. **б)** Покажите, что для всякого модуля $\mathfrak{g}$-модуля V из категории $\mathcal{O}_\lambda$ с максимальным весом λ существует точная последовательность

$$0 \to U \to M_\lambda \oplus \ldots \oplus M_\lambda \to V \to W \to 0,$$

такая, что модули U, W тоже лежат в категории $\mathcal{O}_\lambda$ и $U(\lambda) = W(\lambda) = 0$. **в)** Докажите, что характер всякого $\mathfrak{g}$-модуля V из категории $\mathcal{O}_\lambda$ является линейной комбинацией характеров модулей Верма из категории $\mathcal{O}_\lambda$ с целочисленными коэффициентами. *Указание:* воспользуйтесь пунктами а)-б) и индукцией по частичному порядку на весах.

11. а) Докажите, что характер всякого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля является симметрическим полиномом Лорана от $t = (t_1,\dots,t_n)$. **б)** Докажите, что характер любого конечномерного неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\frac{P(t)}{\prod_{i>j}(t_j-t_i)}$, где $P(t)$ – кососимметрический полином Лорана. **в)** Докажите, что коэффициент $t^{\lambda+\rho}$ в многочлене $P(t)$ равен 1 (здесь $\rho = (n-1, n-2, \dots, 0)$). **г)** Докажите, что если коэффициент при t^μ в многочлене $P(t)$ не равен нулю, то $\mu = \sigma(\lambda+\rho)$ для некоторого $\sigma \in S_n$ и коэффициент равен $(-1)^\sigma$. **д)** Докажите формулу Вейля для характера:

$$\chi_{V_\lambda}(t) = \frac{\sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma t^{\sigma(\lambda+\rho)}}{\prod\limits_{i>j}(t_j - t_i)}.$$