

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2016
ЛИСТОК 4

срок сдачи 09.04.2016

1. Пусть D – произвольная область, $\gamma \subset D$ – гладкая кривая, f – функция, голоморфная в $D \setminus \gamma$ и непрерывная в D . Докажите, что f голоморфна в D .
2. Постройте мероморфную функцию в \mathbb{C} , которая не принимает ровно два значения $a, b \in \mathbb{C}$.
3. Существует ли конформная биекция $f : U \rightarrow U$ (U – единичный круг), такая, что $f(0) = \frac{1}{2}$ и $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?
4. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\text{Im } \tau > 0$, $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Для любого натурального $n \geq 1$ рассмотрим линейное пространство $\Theta_{\alpha, \beta}^{(n)}$ целых функций, удовлетворяющих условиям

$$f(z+1) = e^{2\pi i \alpha} f(z), \quad f(z+\tau) = e^{-\pi i n \tau - 2\pi i n z - 2\pi i \beta} f(z).$$

Они называются тета-функциями порядка n с характеристиками α, β .

- а) Докажите, что $\dim \Theta_{\alpha, \beta}^{(n)} = n$.
 - б) Рассмотрим подпространство $\Theta_{0,0}^{(n)+} \subset \Theta_{0,0}^{(n)}$ четных тета-функций с нулевыми характеристиками; докажите, что $\dim \Theta_{0,0}^{(n)+} = \frac{1}{2}(n+2)$ для четных n и $\frac{1}{2}(n+1)$ для нечетных.
5. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ такое, что $\text{Im } \tau > 0$, и определим функцию $\theta_1(z|\tau)$ рядом

$$\theta_1(z|\tau) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (k + \frac{1}{2})^2 + 2\pi i (k + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

(для краткости будем писать $\theta_1(z|\tau) = \theta_1(z)$).

- а) Докажите, что $\theta_1(z) \in \Theta_{1/2, 1/2}^{(1)}$, т.е.

$$\theta_1(z+1|\tau) = -\theta_1(z|\tau), \quad \theta_1(z+\tau|\tau) = -e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \theta_1(z|\tau).$$

- б) Докажите, что нули функции $\theta_1(z)$ простые и расположены в точках $N + M\tau$, $N, M \in \mathbb{Z}$.
- в) При каких соотношениях на параметры $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ функция

$$f(z) = \frac{\theta_1(z-a_1) \theta_1(z-a_2) \dots \theta_1(z-a_m)}{\theta_1(z-b_1) \theta_1(z-b_2) \dots \theta_1(z-b_n)}$$

будет двойкопериодической в комплексной плоскости?

г) Докажите тождество

$$\begin{aligned} & \theta_1(v+y)\theta_1(v-y)\theta_1(z+u)\theta_1(z-u) - \theta_1(u+y)\theta_1(u-y)\theta_1(z+v)\theta_1(z-v) \\ & + \theta_1(u+v)\theta_1(u-v)\theta_1(z+y)\theta_1(z-y) = 0 \end{aligned}$$

(Указание: воспользуйтесь тем, что $\theta_1(z+a)\theta_1(z-a) \in \Theta_{0,0}^{(2)}$.)

д) Докажите, что функция $\theta_1(z)$ разлагается в бесконечное произведение

$$\theta_1(z) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}e^{2\pi iz})(1 - q^{2n}e^{-2\pi iz}),$$

где $q = e^{\pi i \tau}$.