Теория функций комплексного переменного – 2016
Листок 3

срок сдачи 06.03.2016

1. Докажите, что если функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a и имеет в точке a полюс, то a – существенно особая точка для функции e^f.

2. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a и $\operatorname{Im} f(z) > 0$ всюду в этой окрестности. Какого типа особенность может быть в точке a?

3. Пусть функция f голоморфно и взаимно однозначно отображает внешность единичного круга $|z| > 1$ на некоторую область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и имеет разложение в ряд Лорана вида

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \le 1$ и укажите геометрический смысл этого неравенства.

4. Вычислите следующие интегралы, используя вычеты:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}dx}{1+x^{2n}}$, где $n, p \in \mathbb{N}$, $0 \le p \le n-1$,

б) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$ при $a > b > 0$,

в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$,

г) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\, dx$,

5. Пусть $D \in \mathbb{C}$ – односвязная область, ограниченная гладкой кривой $\gamma = \partial D$, и $w(z)$ – голоморфная функция, взаимно-однозначно отображающая $\bar{D}$ на замыкание единичного круга $\{w\colon |w| \le 1\}$.

а) Выразите единичный касательный и нормальный векторы к кривой γ в точках $z \in \partial D$ через граничные значения $w(z)$ и $w'(z)$ (касательный вектор направлен против часовой стрелки, а нормальный – во внешность области D),

б) Выразите кривизну кривой γ через граничные значения w, w', w''.

6. Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ называется выражение $S(w; z) := \dfrac{w'''(z)}{w'(z)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2$.

а) Проверьте, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \to z} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}$$

б) Докажите, что $S(w; z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ – дробно-линейная функция.

в) Докажите, что шварцианы взаимно-обратных функций $w(z)$ и $z(w)$ связаны соотношением

$$S(w; z) + S(z; w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 0$$

г) Пусть $w(z)$ и $f(w)$ – голоморфные функции, а $F(z) = f(w(z))$ – их композиция; докажите следующую формулу для производной Шварца сложной функции:

$$S(F; z) = S(f; w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + S(w; z)$$