НИС Матфизика: матричные модели

1.1 Некоторые базовые вопросы

1. Представить матричный интеграл

$$Z = \int \mathrm{d}\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}\mathrm{Tr}W(\Phi)} \tag{1}$$

где Φ является матрицей размера $N \times N$ (например, эрмитовой), $\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{V_N}\prod_{i,j} d\Phi_{ij}$, а $W(\Phi)$ - некоторый полином общего вида

$$W(\Phi) = \sum_{k>0} t_k \Phi^k \tag{2}$$

в виде интеграла по собственным значениям

$$Z = \frac{1}{N!}\int \prod_{i=1}^{N}\left(d\phi_i e^{-\frac{1}{\hbar}W(\phi_i)}\right)\Delta^2(\phi), \qquad \Delta(\phi) = \prod_{i<j}(\phi_i - \phi_j) \tag{3}$$

2. Пользуясь ортогональными полиномами $|i\rangle = P_i(\phi; t)$

$$\langle i|j\rangle \equiv \int d\phi e^{-\frac{1}{\hbar}W(\phi)} P_i(\phi) P_j(\phi) = \delta_{ij} e^{q_i(t)} \tag{4}$$

выразить интеграл (3) через нормировочные коэффициенты $\{q_i(t)\}$.

3. Вычислить интеграл (1) для гауссова потенциала $W(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^2 - t\Phi$ как функцию $Z = Z(t, N)$. Какому дифференциально-разностному уравнению удовлетворяет ответ?

   Найти нормировочные коэффициенты $\{q_i(t)\}$ для потенциала $W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - t\phi$. Сравнив для гауссова случая результат прямого вычисления (1) с выражением (3) через найденные коэффициенты $\{q_i(t)\}$, найти V_N.

4. Вывести уравнения стационарности эффективного потенциала

$$W_{\mathrm{eff}}(\phi) = W(\phi) - 2\hbar \log \Delta(\phi) \tag{5}$$

($\phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$), определяющего квазиклассическую асимптотику интеграла (3) при $\hbar \to 0$. В пределе $N \to \infty$ переписать уравнения стационарности в виде интегрального уравнения на плотность $\rho(x) = \hbar \sum_{j=1}^{N} \delta(x - \phi_j)$.

5. Найти решения полученных уравнений стационарности (распределение собственных значений $\rho(x)$) для гауссова потенциала $W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - t\phi$ в пределе $\hbar \to 0$, $N \to \infty$, $\hbar N = t_0 = \mathrm{const}$. Найти для этого случая значение интеграла (3) в квазиклассическом приближении.

1.2 Некоторые задачи

- Вычислить следующие корреляционные функции для гауссовой модели эрмитовых матриц
  (a) $\langle \mathrm{Tr}\Phi^k \rangle$ для $k = 0, \dots, 6$;
  (b) $\langle \mathrm{Tr}\Phi^k \mathrm{Tr}\Phi^l \rangle$ для $k + l \leq 4$.

- Для гауссовой модели эрмитовых матриц вычислить коррелятор $\langle \mathrm{Tr}\frac{1}{x-\Phi} \rangle$ в главном порядке по размеру матрицы N.

- Вычислить производную нормировочных коэффициентов $\{q_i(t)\}$ по параметру t_2. Для четных потенциалов (когда все $t_{2k+1} = 0$) выразить производную по t_2 величин $R_k = e^{q_k - q_{k-1}}$ через них самих (уравнение Вольтерра).

1.3 Литература по геометрии матричных моделей

Предварительные вопросы подобраны на основе обзорной статьи [1] (разделы 1, 2.1, 3), где также можно найти ссылки на другие работы (поскольку это статья в ТМФ - имеется русский текст). Про вычисление матричного интеграла с помощью ортогональных полиномов можно посмотреть практически в любом обзоре, например в [2], относительно краткое изложение геометрической картины можно найти в [3]. По-моему, интерес для изучения представляет работа [4].

Список литературы

[1] A. Marshakov, “Matrix models, complex geometry and integrable systems. I.,” Theor. Math. Phys. **147** (2006) 583 [Teor. Mat. Fiz. **147** (2006) 163] [hep-th/0601212].

[2] Например, в
P. Di Francesco, P. H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, “2-D Gravity and random matrices,” Phys. Rept. **254** (1995) 1 [hep-th/9306153], раздел 2.3

[3] G. Felder and R. Riser, “Holomorphic matrix integrals”, arXiv:hep-th/0401191.

[4] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, “Breakdown of universality in multi-cut matrix models,” J.Phys. **A33** (2000) 6739-6768, [arXiv:cond-mat/0003324].