

# Матричные интегралы

## Аннотация

В данных записках представлена выжимка из текста [1], имеющая некоторое отношение к курсу по “случайным матрицам”.

## 1 Меры и матричные интегралы

- Меры на случайных матрицах, инвариантные относительно “движения” - т.е. действия группы на пространстве соответствующих матриц;
- Эрмитовы матрицы  $\mathcal{H}_N \ni \Phi$ , присоединенное действие группы  $\Phi \mapsto U^\dagger \Phi U$ ,  $U \in U(N)$ . Возможные обобщения  $M \mapsto O^T M O$ ,  $O \in O(N)$  для симметрических матриц, комплексификация  $U(N)$  до  $GL(N, \mathbb{C})$ , но эрмитовы матрицы - наиболее простой и естественный пример с точки зрения (нульмерной) калибровочной “теории поля”;
- Для случайных *независимых* матричных элементов - единственный(?) возможный вариант это гауссова инвариантная мера.

Таким образом для инвариантной гауссовой меры можно написать

$$d\mu(\Phi) = C \prod d\Phi_{ij} \exp(-\beta \text{Tr} \Phi^2) \quad (1.1)$$

а в качестве ее простейшего инвариантного обобщения

$$d\mu_W(\Phi) = C \prod d\Phi_{ij} \exp(-\beta \text{Tr} W(\Phi)) \quad (1.2)$$

для любой функции (по крайней мере полинома)

$$W(\Phi) = \sum_{k>0} t_k \Phi^k \quad (1.3)$$

При этом удобно нормировочную константу  $C = C_N$  выбирать зависящим от  $N$  (но не от параметров потенциала!) способом, а также иногда считать зависящими от размера  $N$  сами параметры потенциала (особенно при изучения предела больших матриц  $N \rightarrow \infty$ ). Также осмысленно изучать квазиклассический предел  $\hbar \rightarrow 0$ , положив  $\beta = 1/\hbar$ .

Наиболее просто при этом изучать средние и корреляционные функции по инвариантным мерам также от инвариантных “операторов” - функций на пространстве матриц

$$\mathcal{H}_N = U(N)/U(1)^N \times \mathbb{R}^N/S_N \quad (1.4)$$

скажем любых функций от следов  $\text{Tr}\Phi^n$ , а также например  $P(x) = \langle \det(x - \Phi) \rangle$  или резольвенту  $G(x) = \langle \text{Tr} \frac{1}{x - \Phi} \rangle$  в смысле ( $\langle 1 \rangle = Z$ ) матричного интеграла [2]

$$Z = \int d\Phi e^{-\frac{1}{\hbar} \text{Tr}W(\Phi)} \quad (1.5)$$

где  $\Phi$  является эрмитовой матрицей размера  $N \times N$ , и мы ввели обозначение

$$d\Phi = \frac{1}{V_N} \prod d\Phi_{ij} \quad (1.6)$$

где нормировочный фактор  $V_N$  содержит объем орбиты унитарной группы  $U(N)/U(1)^N$  (с точностью до факторов типа  $N!$ , ответственных за перестановки собственных значений).

Для матриц конечного размера  $N \times N$  эта статсумма представляет собой просто  $N^2$ -кратный интеграл, который, тем не менее, обладает практически всеми известными нетривиальными свойствами континуальных интегралов квантовой теории поля. Интегрирование по мере (1.2) следует понимать как

$$\int \prod d\Phi_{ij} = \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} d\Phi_{ii} \prod_{i<j} \int_{\mathbb{C}} d^2\Phi_{ij} \quad (1.7)$$

где  $d^2\Phi_{ij} = d\text{Re}\Phi_{ij} \wedge d\text{Im}\Phi_{ij} \sim d\Phi_{ij} \wedge d\Phi_{ji}$  представляет из себя стандартную меру на комплексной плоскости в силу  $\Phi_{ji} = \overline{\Phi_{ij}}$ . Для гауссова веса (1.1) с

$$\text{Tr}\Phi^2 = \sum_i \Phi_{ii}^2 + 2 \sum_{i<j} |\Phi_{ij}|^2 \quad (1.8)$$

это приводит к очевидной формуле “независимости корреляций” матричных элементов

$$\int d\mu(\Phi) \Phi_{ij} \Phi_{kl} \sim \int d\Phi \exp(-\beta \text{Tr}\Phi^2) \Phi_{ij} \Phi_{kl} \sim \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.9)$$

что уже совершенно не так для потенциала (1.3) общего вида. Однако и мера в матричном интеграле общего вида (1.5) может быть сведена к мере на собственных значениях матрицы  $\Phi$ .

Используя калибровочную инвариантность  $\Phi \rightarrow U^\dagger \Phi U$  потенциала (1.3) общего вида, формула (1.5) может быть переписана в виде интеграла только по *собственным значениям* (положим пока  $\hbar = 1$ ), т.е. при подходящем выборе нормировочной константы статсумма (1.5) равна  $Z = \tau_N(t)$ , где

$$\tau_N(t) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N (d\phi_i e^{-W(\phi_i)}) \Delta^2(\phi) \quad (1.10)$$

и

$$\Delta(\phi) = \prod_{i < j} (\phi_i - \phi_j) = \det_{ij} \|\phi_i^{j-1}\| \quad (1.11)$$

обозначает определитель ван-дер-Монда.

Чтобы проверить формулу (1.10), следует применить калибровочное преобразование, которое позволяет диагонализировать матрицу  $\Phi$  заменой  $\Phi = U^\dagger \phi U$ , где  $U \in U(N)/U(1)^N$  принадлежит некоторой "орбите" унитарной группы  $U(N)$  а  $\phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_N)$  является диагональной матрицей. Квадрат определителя ван-дер-Монда возникает в мере интегрирования в формуле (1.10) как якобиан преобразования

$$\delta\Phi_{ij}|_{\Phi=\phi} = (U^\dagger \phi U - \phi)_{ij} \Big|_{U=\exp(i\delta\Omega)} = -i[\delta\Omega, \phi]_{ij} = -i\delta\Omega_{ij}(\phi_i - \phi_j) \quad (1.12)$$

Теперь нормировка становится естественной - после разделения "физических" и "калибровочных" степеней свободы путем диагонализации матрицы  $\Phi$  унитарным калибровочным преобразованием  $\Phi = U^\dagger \phi U$ , где  $\phi$  диагональна. Объем орбиты  $U(N)/U(1)^N$  после этого сокращается из знаменателя после тривиального интегрирования по калибровочным степеням свободы.

### Пример: гауссов случай

Для потенциала  $W(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^2 - t_1\Phi$  интеграл (1.5) может быть вычислен немедленно:

$$Z_{\text{gauss}} = \int d\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}\text{Tr}(\frac{1}{2}\Phi^2 - t_1\Phi)} \Big|_{\Phi \rightarrow t_1 + \Phi} = e^{\frac{Nt_1^2}{2\hbar}} \int d\Phi e^{-\frac{1}{2\hbar}\text{Tr}\Phi^2} = C_N e^{\frac{Nt_1^2}{2\hbar}} (2\pi\hbar)^{\frac{N^2}{2}} \quad (1.13)$$

где  $C_N = \frac{1}{V_N}$ . Зависимость от  $N$  объема унитарной группы обеспечивает для статсуммы (1.13) то, что и производная

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log Z_{\text{gauss}}(N) = \frac{N}{\hbar} \quad (1.14)$$

и отношение

$$\frac{Z_{\text{gauss}}(N+1)Z_{\text{gauss}}(N-1)}{Z_{\text{gauss}}(N)^2} = 2\pi\hbar \frac{C_{N+1}C_{N-1}}{C_N^2} \quad (1.15)$$

являются линейными функциями размера матрицы  $N$ . Действительно, выбрав нормировку

$$V_N = \frac{(2\pi)^{N(N+1)/2}}{\prod_{k=1}^{N-1} k!} \frac{1}{(2\pi)^N} = \frac{(2\pi)^{N(N-1)/2}}{\prod_{k=1}^{N-1} k!}, \quad (1.16)$$

$$\frac{C_{N+1}C_{N-1}}{C_N^2} = \frac{N}{2\pi}$$

получаем, что

$$\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log Z_{\text{gauss}}(N) = \frac{Z_{\text{gauss}}(N+1)Z_{\text{gauss}}(N-1)}{Z_{\text{gauss}}(N)^2} \quad (1.17)$$

Это первое указание на появление уравнений цепочки Тоды [3] в контексте матричных моделей.

## 2 Матричные ансамбли и цепочка Тоды

Начнем с хорошо известного и широко используемого утверждения работы [3], заключающегося в том, что статсуммы (или производящие функции) матричных моделей удовлетворяют уравнениям иерархии Тоды, или, более конкретно, что некоторые интегралы по случайным матрицам представляют собой определенные тау-функции иерархии цепочки Тоды. Наиболее эффективным способом вычислить интеграл по собственным значениям (1.10) является метод ортогональных полиномов. Определитель ван-дер-Монда (1.11) можно эквивалентно переписать в виде

$$\Delta(\phi) = \det_{ij} \|\phi_i^{j-1}\| = \det_{ij} \|P_{j-1}(\phi_i)\| \quad (2.1)$$

с любыми полиномами, нормированными на единичный коэффициент при старшей степени

$$P_k(\phi) = \phi^k + O(\phi^{k-1}) \quad (2.2)$$

и для вычисления матричного интеграла (1.10) удобно выбрать в качестве  $P_j(\phi)$  ортогональные полиномы с весом, определяемым потенциалом матричной модели  $W(\Phi)$

$$\langle i|j \rangle \equiv \int d\phi e^{-W(\phi)} P_i(\phi) P_j(\phi) = \delta_{ij} e^{q_i(t)} \quad (2.3)$$

Подставим определитель ван-дер-Монда, представленный в виде (2.1), с полиномами удовлетворяющими (2.3), в формулу (1.10). Раскрывая детерминант и используя ортогональность полиномов (2.3), производящую функцию (1.5) можно представить в виде

$$\tau_N(t) = \prod_{i=0}^{N-1} e^{q_i(t)} \quad (2.4)$$

произведения норм полиномов (2.3). На самом деле это эквивалентно утверждению, что производящая функция матричной модели (1.5), (1.10), поскольку она имеет вид детерминанта оператора, экспоненциально зависящего от времен или параметров потенциала (1.3), является тау-функцией иерархии Тоды и удовлетворяет нелинейным дифференциальным уравнениям по этим временам.

Чтобы вывести эти уравнения, рассмотрим оператор

$$\phi P_i(\phi) = P_{i+1}(\phi) - p_i(t) P_i(\phi) + R_i(t) P_{i-1}(\phi) = (LP(\phi))_i \quad (2.5)$$

где мы ввели оператор Лакса цепочки Тоды [3], который в базисе ортогональных полиномов (2.3) имеет обычный вид трилинейной (почему?) матрицы  $(LP(\phi))_i = L_{ij} P_j(\phi)$ . Первое уравнение из серии уравнений Лакса  $\partial_{t_k} L = [L, \mathcal{R} \circ L^k]$ , при  $k = 1$

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t_1^2} = e^{q_{i+1}-q_i} - e^{q_i-q_{i-1}} \quad (2.6)$$

немедленно приводит к уравнению движения экспоненциально взаимодействующих частиц, (с координатами  $q_i$  и импульсами  $p_i$ ), или к первому уравнению иерархии цепочки Тоды.

Действительно, пользуясь формулами (2.3), (2.5) легко получить соотношения между функциями  $q_i(t)$  и матричными элементами  $R_i(t)$  и  $p_i(t)$  оператора Лакса. Сначала

$$\langle i|\phi|i-1\rangle = e^{q_i(t)} = R_i(t)e^{q_{i-1}(t)} \quad (2.7)$$

приводит к

$$R_i(t) = e^{q_i(t)-q_{i-1}(t)} \quad (2.8)$$

Дифференцируя (2.3) при  $i = j$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \langle i|i\rangle = e^{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t_1} = \int d\phi e^{-\sum t_k \phi^k} \left( -\phi P_i^2 + 2P_i \frac{\partial P_i}{\partial t_1} \right) = p_i e^{q_i} \quad (2.9)$$

где второй член в скобках пропадает благодаря условию ортогональности и условию (2.2). Далее, из формулы (2.9) следует, что

$$p_i(t) = \frac{\partial q_i(t)}{\partial t_1} \quad (2.10)$$

является просто импульсом  $i$ -й тодовой частицы с координатой  $q_i(t)$ . Дифференцируя теперь (2.3) при  $i > j$ , получаем

$$0 = \int d\phi e^{-\sum t_k \phi^k} \left( -\phi P_i P_j + P_j \frac{\partial P_i}{\partial t_1} \right) \quad (2.11)$$

и используя (2.3) при сравнении этой формулы при  $j \leq i-1$  с формулой (2.5), имеем

$$\frac{\partial P_i}{\partial t_1} = R_i P_{i-1} \quad (2.12)$$

Наконец, мы готовы продифференцировать соотношение (2.5):

$$\phi \frac{\partial P_i}{\partial t_1} = \frac{\partial P_{i+1}}{\partial t_1} - \frac{\partial p_i}{\partial t_1} P_i + O(\phi^{i-1}) \quad (2.13)$$

Умножая (2.13) на  $P_i$ , интегрируя и используя соотношения (2.3) и (2.12), мы наконец получим уравнение

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_1} = R_{i+1} - R_i \quad (2.14)$$

которое, используя (2.10) и (2.8), принимает вид уравнения движения цепочки Тоды (2.6).

Для производящей функции матричной модели (1.5), (1.10) или тау-функции цепочки Тоды (2.4), уравнение движения (2.6) может быть переписано в форме одного из бесконечного множества билинейных соотношений Хироты

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log \tau_N(t) = \frac{\tau_{N+1}(t) \tau_{N-1}(t)}{\tau_N(t)^2} \quad (2.15)$$

справедливость которого мы уже проверили для гауссова интеграла.

### Пример: гауссов случай

Для потенциала  $W(x) = \frac{1}{2}x^2$  ортогональные полиномы представляют собой полиномы Эрмита

$$H_k(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left( -\frac{d}{dx} \right)^k e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.16)$$

для которых

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) H_m(x) = \delta_{nm} n! \sqrt{2\pi} \quad (2.17)$$

а тау-функция

$$\tau_N(t) = (2\pi)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} k! \quad (2.18)$$

## 3 Диаграммная техника и $1/N$ -разложение

На матричную модель можно смотреть как на простейшую калибровочную теорию поля, в которой важнейшей формулой является

$$Z_{\text{gauge}} = \exp(F_{\text{string}}) \quad (3.1)$$

где в качестве простейшего примера  $Z_{\text{gauge}}$  можно рассматривать, например, матричный интеграл (1.5) с потенциалом  $W(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^2 - t\Phi^4$ .

Вспомним сначала, что при усреднении с гауссовой мерой (1.1)

$$\langle \Phi_{ij} \Phi_{kl} \rangle \sim \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.2)$$

и попробуем понять, как будет зависеть от размера матрицы  $N$  ряд для статсуммы

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{\langle \text{Tr} \Phi^4 \dots \text{Tr} \Phi^4 \rangle}_k \quad (3.3)$$

а еще лучше - для ее логарифма  $F = \log Z$ . Для первого слагаемого, например, получим

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr} \Phi^4 \rangle &= \sum \langle \Phi_{ij} \Phi_{jk} \Phi_{kl} \Phi_{li} \rangle = \\ &= \sum (\langle \Phi_{ij} \Phi_{jk} \rangle \langle \Phi_{kl} \Phi_{li} \rangle + \langle \Phi_{ij} \Phi_{kl} \rangle \langle \Phi_{jk} \Phi_{li} \rangle + \langle \Phi_{ij} \Phi_{li} \rangle \langle \Phi_{jk} \Phi_{kl} \rangle) = \\ &= \sum (\delta_{ik} \delta_{jj} \cdot \delta_{ki} \delta_{ll} + \delta_{il} \delta_{jk} \cdot \delta_{ji} \delta_{kl} + \delta_{ii} \delta_{jl} \cdot \delta_{jl} \delta_{kk}) = N(2N^2 + 1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

что еще лучше продемонстрировать тремя диаграммами Фейнмана, из которых уже понятно почему одна из них имеет меньший порядок по  $N$ . Легко понять, что разложив

интеграл (1.5), мы получим сумму по *толстым* графам, каждый из которых будет входить с весом

$$\left(\frac{t}{\hbar}\right)^V \hbar^E N^F \underset{\hbar N = t_0}{=} \hbar^{-(V-E+F)} t^V t_0^F \quad (3.5)$$

где  $g$  обозначает введенный род римановой поверхности, отвечающей фейнмановскому графу, у которого  $V$  вершинам,  $E$  ребер и  $F$  граней, с эйлеровой характеристикой  $\chi_g = V - E + F = 2 - 2g$ . Таким образом легко понять, что свободная энергия или струнная статсумма

$$F_{\text{string}} = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t_0; t) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \tilde{F}_g(t_0; t) \quad (3.6)$$

представляет собой “двойное разложение” по связным толстым графам, в котором квазиклассическое или  $1/N$ -разложение [4] может быть проинтерпретировано как сумма по вкладам  $F_g$  рода  $g$  в функцию распределения некоторой теории *замкнутых* струн.

Эквивалентность  $\frac{1}{N}$ -разложения квазиклассическому обеспечивается введенной величиной

$$t_0 = \hbar N \quad (3.7)$$

которая, в частности, остается фиксированной и конечной в квазиклассическом пределе  $N \rightarrow \infty$  одновременно с  $\hbar \rightarrow 0$ .

## 4 Планарный предел одноматричной модели

Вернемся теперь к простейшему матричному интегралу (1.5) и перейдем к непосредственному обсуждению планарного предела  $N \rightarrow \infty$ ,  $\hbar \rightarrow 0$  при фиксированном новом введенном в (3.7) параметре  $N\hbar = t_0$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  из всего топологического разложения (3.6) выживает лишь первый член  $F_0 = \mathcal{F}$ , с  $g = 0$ , отвечающий суммированию по планарным толстым графам, которые могут быть нарисованы на сфере без самопересечений. Одновременно в этом пределе, поскольку  $\hbar \rightarrow 0$ , матричный интеграл (1.5) может быть вычислен квазиклассически, т.е. методом стационарной фазы.

### 4.1 Интеграл по собственным значениям и комплексная кривая

Квазиклассическое значение интеграла по собственным значениям (1.10) при  $\hbar \rightarrow 0$  может быть получено изучая экстремумы эффективного потенциала

$$W_{\text{eff}}(\phi) = W(\phi) - 2\hbar \log \Delta(\phi) \quad (4.1)$$

или, точнее, решая уравнение стационарности

$$W'(\phi_j) = 2\hbar \sum_{k \neq j} \frac{1}{\phi_j - \phi_k} \quad (4.2)$$

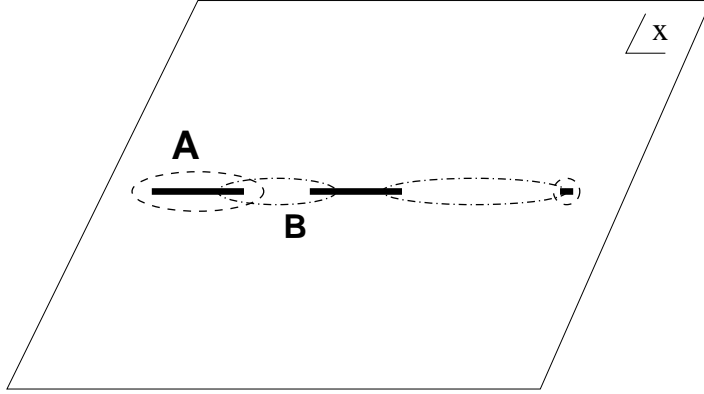


Рис. 1: Разрезы в плоскости собственных значений и циклы на  $x$ -листах гиперэллиптической римановой поверхности (4.13) одноматричной модели. **A**-циклы традиционно выбираются вокруг разрезов или носителей собственных значений (которые на данной картинке предполагаются отрезками на вещественной оси  $\text{Im}x = 0$ ), в то время как **B**-циклы связывают два различных носителя собственных значений.

При  $\hbar = 0$  взаимодействие в правой части уравнения (4.2) “выключено”, и все собственные значения  $\phi_j$  как-то распределены по минимумам, или, в наиболее общей постановке задачи, по всем экстремумам, в которых  $W'(\phi) = 0$ . Более удобно при  $N \rightarrow \infty$  ввести плотность собственных значений

$$\rho(x) = \hbar \left\langle \sum_{j=1}^N \delta(x - \phi_j) \right\rangle \quad (4.3)$$

или резольвенту

$$G(x) = \hbar \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - \Phi} \right\rangle_{\Phi} = \int_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\phi) d\phi}{x - \phi} \quad (4.4)$$

определенную на  $x$ -плоскости с вырезанным носителем собственных значений, или, как мы увидим ниже, на двойном накрытии комплексной  $x$ -плоскости, разрезанной вдоль некоторых отрезков  $\mathbf{C} = \bigcup_j C_j$ , (изображенных на рис. 1), и нормированную следующим образом

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} dx G(x) = \int_{\mathbf{C}} d\phi \rho(\phi) = t_0 \quad (4.5)$$

Более того, очевидно, что

- резольвента  $G(x)$  аналитична на всей комплексной плоскости с выкинутыми отрезками  $\mathbf{C} = \bigcup_j C_j$ ;
- имеет асимптотику на бесконечности

$$G(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{t_0}{x} + \dots \quad (4.6)$$



- на отрезках  $\mathbf{C} = \bigcup_j C_j$  испытывает скачки

$$G(x_+) - G(x_-) = 2\pi i \rho(x) \quad (4.7)$$

что сразу следует из интегрального представления Коши (4.4).

Проще всего сказать, что в силу формул Сохоцкого

$$\frac{1}{x \mp i0} = P.V. \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x) \quad (4.8)$$

резольвента является хорошо определенной аналитической функцией на двойном накрытии  $x$ -плоскости, склеенном по берегам разрезов  $\bigcup_j C_j$  с перечисленными выше свойствами.

В терминах резольвенты соотношение (4.2) может быть записано как *интегральное* уравнение

$$W'(x) = 2 \int_{\mathbf{C}} \frac{\rho(\phi) d\phi}{x - \phi} = G(x_+) + G(x_-), \quad x \in \forall C_j \subset \mathbf{C} \quad (4.9)$$

где  $x_{\pm} = x \pm i0$  представляют собой две “близкие” точки на двух различных сторонах разреза – выше и ниже разреза, если распределение собственных значений вещественно и разрезы вытянуты вдоль вещественной оси, а интеграл  $\int_{\mathbf{C}} = P.V. \int$  определен в смысле главного значения. Это уравнение выполняется в любой точке носителя собственных значений  $\mathbf{C}$ , состоящего из нескольких несвязанных кусков для общего полиномиального потенциала.

Вообще говоря такие задачи (проблемы Римана-Гильберта - восстановление в данном случае резольвенты по ее аналитическим свойствам) решать довольно сложно, но в нашем примере формула (4.9) может быть к счастью переписана как алгебраическое (более того - квадратное) уравнение на резольвенту  $G$ , см. например [5, 6, 7, 8, 9]

$$G^2 - W'(x)G = f(x) \quad (4.10)$$

где  $f(x)$  в правой части обозначает полином степени на единицу меньше, чем степень  $W'(x)$ . В самом деле, из уравнения (4.9) следует, что

$$\begin{aligned} G^2|_{x=x_+} - G^2|_{x=x_-} &= (G(x_+) - G(x_-)) (G(x_+) + G(x_-)) = (G(x_+) - G(x_-)) W'(x) \\ (G^2 - W'G)|_{x=x_+} - (G^2 - W'G)|_{x=x_-} &= \\ &= (G(x_+) - G(x_-)) (G(x_+) + G(x_-) - W'(x)) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

т.е. левая часть формулы (4.10) представляет собой однозначную функцию  $f(x)$ , вид которой (то, что она является полиномом определенной степени) фиксируются поведением при  $x \rightarrow \infty$ .

Уравнение (4.10) определяет гиперэллиптическую кривую, и, как мы увидим ниже, квазиклассическая свободная энергия  $\mathcal{F} = F_0$  (или первый член в формуле (3.6)) может быть целиком определена в терминах кривой (4.10) и производящего дифференциала  $Gdx$ , определяемого резольвентой (4.4) и определяющего распределение собственных значений. Для полиномиальных потенциалов уравнение (4.10) описывает алгебраическую кривую (конечного рода  $n$  для потенциала  $W$  степени  $n + 1$ ) и определяет резольвенту  $G$  как *алгебраическую функцию* на кривой, дважды накрывающей  $x$ -плоскость.

Вводя новую переменную с помощью

$$y = W'(x) - 2G \quad (4.12)$$

формулу (4.10) можно переписать в виде

$$y^2 = W'(x)^2 + 4f(x) = R(x) \quad (4.13)$$

где  $R(x)$  является полиномом степени  $2n$  для потенциала  $W(x)$  степени  $n + 1$ . С таким полиномом уравнение (4.13) является каноническим представлением гиперэллиптической кривой рода  $g = n - 1$ . Заметим сразу, что в случае гауссова интеграла  $n = 1$  т.е.  $g = 0$  и кривая рациональна.

### Пример: гауссов случай

Решим теперь явно выведенное выше уравнение (4.9) для простейшего гауссова потенциала  $W = \frac{1}{2}x^2$ . Правая часть уравнения (4.10) в данном случае ( $n = 1$ ) является просто константой, и решение уравнения (4.10) имеет вид

$$G = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4f} \equiv \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (4.14)$$

т.е. у него один разрез в плоскости собственных значений, с единственным параметром  $a^2 = -4f$ , который можно отождествить с квадратом половинной длины разреза, расположенного симметрично вокруг  $x = 0$  в  $x$ -плоскости. Его можно зафиксировать с помощью нормировки (4.5), которая приводит к значению  $a^2 = 4t_0$ . В этом случае кривая матричной модели (4.10), (4.13) рациональна или ее род  $g = 0$ , а плотность собственных значений равна

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (4.15)$$

т.е. мы сразу и получили *полукруговое распределение* Вигнера.

## 4.2 Свободная энергия: геометрическое определение

Под вычислением свободной энергии матричной модели (1.5) в квазиклассическом пределе или пределе больших  $N$  обычно понимают решение вариационной задачи (4.2) для

функционала<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= - \left[ \sum_i W(\phi_i) - \hbar \sum_{i \neq j} \log |\phi_i - \phi_j| \right]_{N=\sum_\alpha N_\alpha} = \\ &= - \left[ \int dx \rho(x) W(x) - \int dx_1 \int dx_2 \rho(x_1) \log |x_1 - x_2| \rho(x_2) + \sum_\alpha \Pi_\alpha \left( \int_{C_\alpha} dx \rho(x) \right) - S_\alpha \right]_{\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} = 0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

В дополнение к формальному определению (1.10) здесь следует добавить некоторое фиксированное разбиение всех  $N \rightarrow \infty$  собственных значений по некоторому (конечному) числу групп с числами заполнения  $\sum_\alpha N_\alpha = N$ , что приводит к дополнительному линейному соотношению на новые квазиклассические переменные  $\sum_\alpha S_\alpha = \hbar N = t_0$ . Обсудим сначала природу и смысл этих групп и соответствующих им чисел заполнения.

Интуитивно ясно, что в квазиклассическом пределе собственные значения выпадают в конденсаты, которые могут быть расположены в окрестности любого из минимумов (или даже около любого экстремума  $W'(\phi) = 0$  как мы увидим немедленно). Если бы кулоновское отталкивание, происходящее из детерминанта ван-дер-Монда, было бы исключено путем  $\hbar \rightarrow 0$ , собственные значения расположились бы непосредственно в экстремумах. Поэтому, для малых чисел заполнения собственных значений эта картина очевидна, при больших значениях все несколько усложняется (конденсаты могут расти и сталкиваться), и мы обсудим некоторые детали этого процесса ниже. Прыжки же между конденсатами подавлены экспоненциально, поскольку их вклад порядка  $e^{-\text{const}/\hbar} \sim e^{-\text{const} \cdot N}$ , а следовательно, естественно ввести дополнительные (по отношению к коэффициентам потенциала (1.3)) переменные, или фиксировать числа заполнения

$$S_\alpha = \hbar N_\alpha = \int_{C_\alpha} dx \rho(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\alpha} G dx \quad (4.17)$$

в каждом экстремуме при решении вариационной задачи для функционала (4.16), скажем вводя соответствующие множители Лагранжа  $\Pi_\alpha$ .

Более того понятно, что при выключенном кулоновском взаимодействии стационарные конфигурации в общем положении представляют собой наборы изолированных точек – экстремумов потенциала  $W'(\phi) = 0$ , при больших  $N$  входящих с определенными кратностями. Однако взаимодействие сглаживает картину, и вместо изолированных точек возникают одномерные линии, на которые можно смотреть как на аналогичные траекториям в механике или как на аналоги изинговых струн. При аналитическом продолжении производящей функции в пространстве параметров и деформации контуров интегрирования это приводит к появлению комплексных кривых статистических матричных ансамблей.

<sup>1</sup> Под модулем в аргументе логарифма обычно понимается выбор подходящей ветви логарифмической функции, буквально это совпадает с модулем, когда все собственные значения предполагаются вещественными.

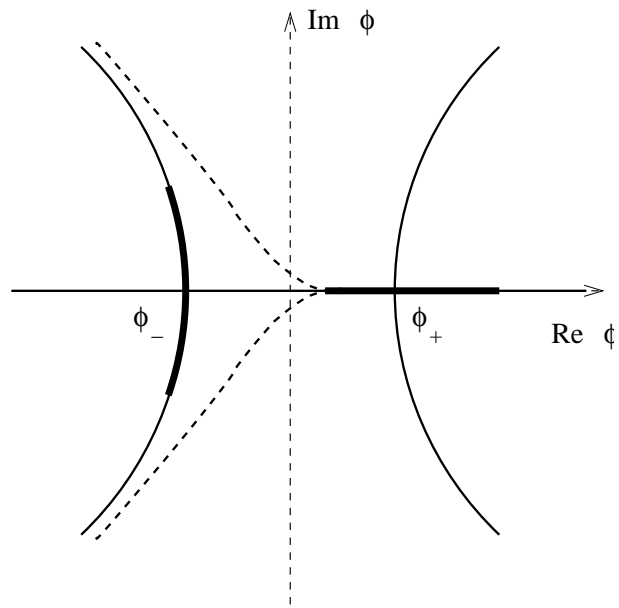


Рис. 2: Комплексная геометрия потенциала  $W(\phi) = \frac{\phi^3}{3} - t\phi$ . Линиями уровня, проходящими через критические точки  $\phi_{\pm} = \pm\sqrt{t}$  являются  $\text{Im}\phi = 0$  и  $(\text{Re}\phi)^2 - \frac{(\text{Im}\phi)^2}{3} - t = 0$ . Кулоновское отталкивание растягивает собственные значения вдоль сегментов линий уровня вокруг критических точек.

Чтобы понимать это лучше, следует вспомнить, что как и любой другой, интеграл по собственным значениям (1.10) зависит от выбора контуров интегрирования. Для потенциала степени  $n+1$  существует  $n$ -мерный базис в линейном пространстве всевозможных контуров, для которых интеграл по каждому собственному значению сходится. Легко видеть, что каждый контур “скорейшего спуска” может быть выбран в комплексной плоскости так, что он в точности проходит ровно через одну из  $n$  экстремальных точек  $W'(\phi) = 0$ , подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [10].

Для простейшего негауссового потенциала  $W(\phi) = \frac{\phi^3}{3} - t\phi$  соответствующей геометрия проиллюстрирована на рис. 2. Двумя критическими точками потенциала являются  $\phi_{\pm} = \pm\sqrt{t}$  (на рисунке параметр  $t$  выбран вещественным и положительным). Линии скорейшего спуска для  $\text{Re}W$ , проходящие через критические точки  $\phi_{\pm}$ , являются линиями уровня для  $\text{Im}W = \text{Im}\phi \left( (\text{Re}\phi)^2 - \frac{(\text{Im}\phi)^2}{3} - t \right) = 0$ . Контур интегрирования, для которых интегралы по собственным значениям сходятся должны начинаться и заканчиваться в одном из  $n+1$  секторов комплексной  $\phi$ -плоскости, где  $\text{Re}W > 0$  ( $n=2$  для рис. 2, т.е. для этого случая всего три таких сектора). Поскольку подынтегральное выражение голоморфно и значение интеграла не зависит от локальной деформации контуров, метод скорейшего спуска “выбирает” контур интегрирования из одного допустимого сектора в другой, проходящий через критическую точку (два таких возможных контура показаны на рис. 2 пунктирными линиями). Как уже отмечалось выше, вклад определителя ван-дер-Монда в эффективный потенциал (4.1) приводит к отталкиванию собственных значений, так что из положений точно в экстремумах  $W'(x) = 0$  они растекаются вдоль сегментов допустимых контуров, см. рис. 2.

Квазиклассическая свободная энергия (4.16) вычисляется при критических плотностях, т.е. когда

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho(x)} = -W(x) + 2 \int_{\mathcal{C}} d\phi \rho(\phi) \log|x - \phi| - \Pi_{\alpha} = 0, \quad x \in C_{\alpha} \quad (4.18)$$

Равенство справа может быть использовано для вычисления множителей Лагранжа  $\Pi_{\alpha}$ , которые будут интенсивно использоваться ниже, так как они равны частным производным свободной энергии (4.16) по числам заполнения (4.17)

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial S_{\alpha}} = \Pi_{\alpha} + \int_{\mathcal{C}} dx \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho(x)} \frac{\partial\rho(x)}{\partial S_{\alpha}} = \Pi_{\alpha} \quad (4.19)$$

поскольку вариационная производная зануляется вследствие формулы (4.18), которая одновременно определяет и сам множитель Лагранжа.

Формулы (4.16) с этого момента могут рассматриваться как независимое геометрическое определение планарной свободной энергии  $\mathcal{F}$ . Чтобы сделать его точным, решение уравнений (4.18), (4.16) следует дополнить граничными условиями – выбором носителя  $\mathcal{C}$  на котором плотность собственных значений  $\rho(x) \neq 0$  не зануляется, или областью неана-

литичности резольвенты  $G(x)dx$  (4.4). Этот носитель (набор "разрезов" для одноматричной модели) вводится "руками", но их длина и форма (или размер и форма в двумерном случае, который будет подробно обсуждаться ниже) после этого определяется динамически. Плотность собственных значений в одномерной области (объединение "разрезов") выражается с помощью уравнения (4.10) через параметры потенциала и коэффициенты вспомогательной функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k \quad (4.20)$$

связанные с числами заполнения собственных значений. Отметим сразу, что свобода в выборе дополнительных свободных параметров полинома (4.20), появляющегося в правой части уравнения (4.10), в точности поглощается введенными новыми параметрами - числами заполнения (4.17).

Ниже мы продемонстрируем, что геометрическое определение свободной энергии (4.19) в точности совпадает с частным случаем так называемых препотенциалов или квазиклассических тау-функций, которые могут быть введены в принципе для любого общего комплексного многообразия, оснащенного некоторой дополнительной структурой, обычно закодированной в мероморфную дифференциальную форму. Для планарного предела одноматричной модели, который мы обсуждали в данном разделе, это комплексное многообразие может быть отождествлено с гиперэллиптической кривой (4.10), (4.13).

### Пример: гауссов случай

Легко убедиться, что статсумма в данном случае выражается формулой

$$\mathcal{F}|_{t_1=0} = \left( \frac{t_0^2}{2} \left( \log t_0 - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} t_0 t_1^2 \right) \Big|_{t_1=0} = \frac{t_0^2}{2} \left( \log t_0 - \frac{3}{2} \right) \quad (4.21)$$

совпадающей с первым членом квазиклассического разложения выражения (1.13) при  $t_1 = 0$ , отвечающим случаю симметрично расположенного разреза  $\mathbf{C} = [-a, a]$  в  $x$ -плоскости и вignerовской плотности собственных значений (4.15). Формула (4.21) следует из единственного в гауссовом случае соотношения (4.19) для производной свободной энергии по полному числу собственных значений  $S = t_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_0} &= -W(x^*) + 2 \int_{\mathbf{C}} d\phi \rho(\phi) \log |x^* - \phi| \Big|_{x^*=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \log x dx = \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \log \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right) \Big|_{4a^2=t_0} = t_0 (\log t_0 - 1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Интегрирование (4.22) приводит к выражению (4.21), в котором зависимость от  $t_1$  тривиально восстанавливается благодаря простому аргументу со сдвигом (например, из формулы (1.13) немедленно следует, что  $Z_{\text{gauss}} = e^{\frac{t_0 t_1^2}{2n^2}} Z_{\text{gauss}}|_{t_1=0}$ .

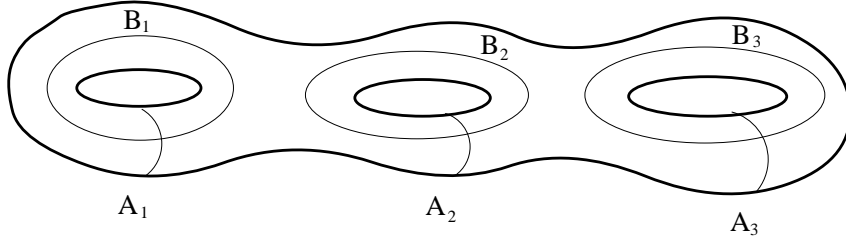


Рис. 3: Компактная риманова поверхность рода  $g = 3$  с выбранным базисом  $A$  и  $B$  циклов, с формой пересечений  $A_\alpha \circ B_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ . Переобозначение  $A$ - и  $B$ -циклов называется преобразованием *дуальности*.

## А Дополнение. Квазиклассическая тау-функция

Квазиклассическая свободная энергия матричной модели, определенная формулами (4.19) является частным случаем так называемых препотенциалов, или, более точно квазиклассических тау-функций, введенных в работе [11]. Чтобы продолжить обсуждение геометрических свойств матричных моделей, нам следует узнать больше о свойствах квазиклассических тау-функций, вспомнив сначала некоторые необходимые факты из геометрии комплексных кривых.

### А.1 Римановы поверхности, голоморфные и мероморфные дифференциалы

Начнем с того, что вспомним некоторые хорошо известные факты из теории римановых поверхностей или одномерных комплексных многообразий - комплексных кривых. Топология компактной ориентируемой римановой поверхности характеризуется единственным целым неотрицательным числом - родом  $g$ , обычно представляемым как число "ручек приклеенных к сфере. Простейшими примерами являются собственно сфера без ручек или с  $g = 0$  и тор с  $g = 1$ , пример римановой поверхности с  $g = 3$  изображен на рис. 3.

На римановой поверхности  $\Sigma_g$  рода  $g$  существует  $2g$  независимых нестягиваемых контура, которые можно разбить на пары, обычно называемые  $A \equiv \{A_\alpha\}$  и  $B \equiv \{B_\alpha\}$  циклами, (см. рис. 3)  $\alpha = 1, \dots, g$ , с формой пересечений  $A_\alpha \circ B_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ . Базис в пространстве одиформ естественным образом двойственен базису одномерных циклов, например *голоморфные* (или абелевы первого рода) дифференциалы  $\bar{\partial}(d\omega_\alpha) = 0$  канонически выбираются нормированными на  $A$ -циклы

$$\oint_{A_\beta} d\omega_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.1})$$

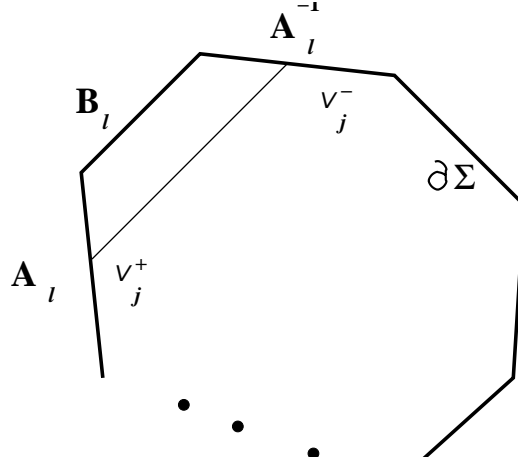


Рис. 4: Разрезанная риманова поверхность с границей  $\partial\Sigma$ .

Их интегралы вдоль  $B$ -циклов образуют при этом *матрицу периодов*

$$\oint_{B_\beta} d\omega_\alpha = T_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2})$$

(симметричную матрицу размера  $g \times g$  с положительно определенной мнимой частью), которая является одной из наиболее важных характеристик комплексной кривой. Симметричность матрицы периодов следует из билинейных соотношений Римана для голоморфных дифференциалов

$$0 = \int_{\Sigma} d\omega_\beta \wedge d\omega_\gamma = \sum_{\alpha} \left( \oint_{A_\alpha} d\omega_\beta \oint_{B_\alpha} d\omega_\gamma - \oint_{A_\alpha} d\omega_\gamma \oint_{B_\alpha} d\omega_\beta \right) = T_{\beta\gamma} - T_{\gamma\beta} \quad (\text{A.3})$$

являющихся следствием теоремы Стокса на разрезанной римановой поверхности, (см. рис. 4), и зануления любой  $(2, 0)$ -формы, в частности  $d\omega_\beta \wedge d\omega_\gamma$ , на одномерном комплексном многообразии. Аналогичным образом, мнимая часть матрицы периодов положительно определена, поскольку  $\text{Im}T_{\alpha\beta} \propto \int_{\Sigma} d\omega_\alpha \wedge d\bar{\omega}_\beta$ .

В отличие от голоморфных, мероморфные дифференциалы  $d\Omega$  аналитичны везде, кроме конечного числа точек  $P$ , где они могут иметь полюса и  $\bar{\partial}d\Omega \propto \delta(P)$ . Их канонический вид фиксируется не только половиной периодов (как для голоморфных, см. (A.1)), но также их поведением ("главной частью") в сингулярных точках. Стандартная классификация мероморфных дифференциалов включает абелевы дифференциалы второго рода с единственной сингулярностью в некоторой точке  $P_0$  вида  $d\Omega_k \sim \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} + \dots$ ,  $k \geq 1$ , где точками обозначена несингулярная часть, а  $\zeta$  является локальной координатой в точке  $P_0$ :  $\zeta(P_0) = 0$ . Заметим, что этот ряд начинается с дифференциалов с полюсами второго порядка, так как не существует дифференциала с единственным полюсом первого порядка, из-за зануления полного вычета. Вместо этого, для того чтобы учесть полюса первого



порядка, удобно ввести абелевы дифференциалы третьего рода  $d\Omega_{\pm}$ , с *двумя* полюсами первого порядка в некоторых точках  $P_{\pm}$  и, противоположными по знаку, единичными вычетами в этих точках.

Заметим теперь, что к так определенному абелеву дифференциалу второго и/или третьего рода всегда можно добавить любую линейную комбинацию голоморфных дифференциалов, не меняя поведения в особых точках. Чтобы зафиксировать эту неопределенность, следует наложить  $g$  условий (размерность пространства голоморфных дифференциалов) на их периоды, каноническим выбором таких условий является зануление всех  $A$ -периодов  $\oint_{\mathbf{A}} d\Omega = 0$ . Это означает, что в качестве строгого определения абелевых дифференциалов следует написать

$$d\Omega_k \underset{P \rightarrow P_0}{\sim} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} + \dots, \quad \oint_{\mathbf{A}} d\Omega_k = 0, \quad k \geq 1 \quad (\text{A.4})$$

для второго рода

$$d\Omega_0 \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{\sim} \pm \frac{d\zeta_{\pm}}{\zeta_{\pm}} + \dots, \quad \oint_{\mathbf{A}} d\Omega_0 = 0, \quad (\text{A.5})$$

для дифференциалов третьего рода, где  $\zeta_{\pm}(P_{\pm}) = 0$ . Бипольный дифференциал (A.5) может быть также представлен в виде

$$d\Omega_0 = d \log \frac{E(P, P_+)}{E(P, P_-)} \quad (\text{A.6})$$

где  $E(P, P')$  - так называемая главная форма на  $\Sigma \times \Sigma$ , или  $-\frac{1}{2}$ -бидифференциал с единственным нулем при совпадающих аргументах, см. [12].

Таким же способом как для (A.3), можно выписать билинейные соотношения Римана для общих мероморфных абелевых дифференциалов. Например, для абелевых дифференциалов первого и третьего рода получаем соотношение

$$0 = \int_{\Sigma} d\omega_{\beta} \wedge d\Omega_0 = \sum_{\alpha} \left( \oint_{A_{\alpha}} d\omega_{\beta} \oint_{B_{\alpha}} d\Omega_0 - \oint_{A_{\alpha}} d\Omega_0 \oint_{B_{\alpha}} d\omega_{\beta} \right) + \\ + \text{res}_{\infty}(d\omega_{\beta}) \int_{\infty-}^{\infty+} d\Omega_0 - \text{res}_{\infty}(d\Omega_0) \int_{\infty-}^{\infty+} d\omega_{\beta} = \oint_{B_{\beta}} d\Omega_0 - \int_{\infty-}^{\infty+} d\omega_{\beta} \quad (\text{A.7})$$

которое широко используется в теории тодовских интегрируемых систем, естественно и часто возникающих в контексте матричных моделей.

На практике комплексные многообразия могут быть эффективно описаны системами полиномиальных уравнений в многомерных комплексных евклидовых пространствах  $\mathbb{C}^K$ , чтобы получить комплексную кривую следует наложить  $K-1$  уравнений на  $K$  переменных. Коэффициенты этих уравнений играют роль *модулей* комплексной структуры соответствующей римановой поверхности, для поверхности рода  $g > 1$  комплексная размерность пространства модулей равна  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g - 3$ , что может быть найдено из теоремы

Римана-Роха. Римановы поверхности с различными комплексными структурами не могут быть голоморфно отображены друг на друга, т.е. являются различными комплексными многообразиями, хотя и могут быть изоморфны как вещественные поверхности. Заметим также, что это говорит о том, что матричные элементы матрицы периодов (А.2) не являются функционально независимыми, так они представляют собой  $g(g+1)/2$  функций от всего лишь  $3g-3$  модулей, за исключением родов  $g=2,3$ , которые решают квадратное уравнение  $g(g+1)/2 = 3g-3$  и исключительного случая  $g=1$  с единственным модулем комплексного тора.

## А.2 Определение квазиклассической тау-функции

Пусть  $\Sigma$  - риманова поверхность некоторого конечного рода  $g$ , и предположим, что на ней заданы два мероморфных дифференциала, скажем обозначенные как  $dx$  и  $dy$ , с фиксированными периодами. Как уже обсуждалось выше, без потери общности, в качестве таких дифференциалов всегда можно взять канонически нормированные мероморфные дифференциалы, например с нулевыми  $A$ -периодами. Однако, если одновременно зафиксировать оставшиеся  $B$ -периоды, это приведет к нетривиальным ограничениям на пространстве модулей  $\Sigma$ . На практике это ограничит нас на некоторое подпространство полного пространства модулей, а размерность этого подпространства можно оценить следующим образом: дифференциалы  $dx$  и  $dy$  определены с точностью до умножения на число, и фиксация  $B$ -периодов  $dx$  дает  $g-1$  условий (принимая во внимание свободу относительно растяжений), в то время как  $B$ -периоды  $dy$  приводят в дополнение к  $g-2$  условиям. Вместе мы получаем систему с  $(3g-3) - (g-1) - (g-2) = g$  параметрами, т.е. с числом модулей, равным роду кривой  $\Sigma$ .

Комплексная кривая, оснащенная двумя мероморфными дифференциалами с фиксированными периодами, или, более кратко,  $g$ -параметрическое семейство кривых определяет *интегрируемую систему*<sup>2</sup>. На практике обычно рассматривается  $g$ -параметрическое семейство римановых поверхностей  $\Sigma$ , оснащенных *производящим* мероморфным дифференциалом, определяемым, с точностью до константы, формулой

$$dS \propto ydx, \quad \delta_{\text{moduli}} dS = \text{holomorphic} \quad (\text{A.8})$$

где  $y(P) = \int^P dy$ ,  $P \in \Sigma$  представляет собой абелев интеграл на  $\Sigma$ , а под вариацией по модулям понимается любая локальная вариация оставшихся  $g$  параметров семейства, которое "выживает" после фиксации всех периодов  $dx$  и  $dy$ .

Общее определение *препотенциала* интегрируемой системы для  $g$ -мерного семейства

---

<sup>2</sup> В наиболее общем духе теоремы Лиувилля можно сказать, что на  $g$ -мерном подпространстве пространства модулей  $\Sigma$  можно всегда выбрать  $g$  независимых функций - гамильтонианов или действий, в то время как координаты на якобиане **Жас** кривой  $\Sigma$ , т.е. на  $g$ -мерном комплексном торе, играют роль комплексифицированных угловых переменных.

гладких кривых  $\Sigma_g$  рода  $g$ , оснащенных мероморфными один-формами, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \oint_{\mathbf{A}} dS, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{S}} &= 2\pi i \oint_{\mathbf{B}} dS \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где  $A$  и  $B$  - дуальные циклы в базисе гомологий. Препотенциал определяется формулой (A.9) локально на пространстве модулей  $\Sigma$ , или, точнее, на пространстве Тейхмюллера при фиксированном базисе в  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$ . Для комплексных кривых, когда к формулам (A.9) естественно добавить переменные, связанные с вырожденными циклами или отмеченными точками (как в простейшем примере гауссовой модели (4.21), разобранным выше), точное определение обобщенного таким образом препотенциала было предложено в работе [11], где он назывался (логарифмом) квазиклассической тау-функции или тау-функции обобщенной иерархии Уизема. Непротиворечивость формул (A.9) гарантируется условием интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial S_\alpha \partial S_\beta} = 2\pi i T_{\alpha\beta} \quad (\text{A.10})$$

следующем непосредственно из (A.8) и (A.3), или симметричности матрицы периодов  $T_{\alpha\beta}$  римановой поверхности  $\Sigma_g$ .

Для вырожденных кривых или кривых с отмеченными точками с формулы (A.9) следует рассматривать более аккуратно, и не всегда применять непосредственно. Вырожденный  $A$ -цикл превращается в пару отмеченных точек  $P_\pm$  (солитонное вырождение ручки), и для такой вырожденной ручки формулы (A.9) преобразуются в

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2\pi i} \text{res}_{P_+} dS = -\frac{1}{2\pi i} \text{res}_{P_-} dS \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_0} &= 4\pi i \int_{P_-}^{P_+} dS \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

где последнее выражение наивно расходится и должно применяться только после аккуратного доопределения, при котором расходящийся интеграл заменяется на конечную величину, как это случилось в простейшем гауссовом примере (4.22).

В наиболее общей постановке, определение (A.9) должно быть дополнено временными переменными, ассоциированными с абелевыми дифференциалами второго рода, с сингулярностями в некоторой точке

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{1}{2\pi i k} \text{res}_{P_0} \xi^{-k} dS, \quad k > 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} &= \frac{1}{2\pi i} \text{res}_{P_0} \xi^k dS, \quad k > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где  $\xi$  обозначает *обратную* локальную координату в окрестности  $P_0$ :  $\xi(P_0) = \infty$ . Условие согласованности для (A.12) обеспечивается

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_k} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{P_0}(\xi^k d\Omega_n) \quad (\text{A.13})$$

а симметричность (A.13) следует из равенства  $\Omega_n = \xi_+^n$ , где операция  $+$  оставляет только главную, сингулярную в  $P_0$ , часть функции  $\xi^n$ . Другими словами, дифференциал  $d\Omega$  мероморфен на  $\Sigma_g$  с единственной сингулярностью в точке  $P_0$ , т.е. является абелевым дифференциалом второго рода (A.4).

Собрав все вместе, базис времен  $(\mathbf{S}, \mathbf{t}, t_0)$  в точности отвечает базису абелевых дифференциалов первого, второго и третьего рода. Для производящей один-формы (A.8) имеем

$$\frac{\partial dS}{\partial S_\alpha} = d\omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, g \quad (\text{A.14})$$

одновременно с формулами

$$\frac{\partial dS}{\partial t_0} = d\Omega_0 \quad (\text{A.15})$$

и

$$\frac{\partial dS}{\partial t_k} = d\Omega_k, \quad k \geq 1 \quad (\text{A.16})$$

которые "двойственны" по отношению к первым строчкам формул (A.9), (A.11) и (A.12), а производные по модулям берутся при постоянной локальной координате  $\xi$  (что отвечает выбору некоторой связности на пространстве модулей  $\Sigma$ ). Для рациональной кривой  $\Sigma_0$  с единственной отмеченной точкой  $P_0$  переменные (A.9) и (A.11) отсутствуют, а формулы (A.12) определяют тау-функцию бездисперсионной иерархии дКП. В этом случае сингулярная в точке  $P_0$  часть  $\xi_+^n$  является полиномом  $n$ -й степени по некоторой глобальной униформизирующей координате  $\lambda$ .

### A.3 Тау-функция одноматричной модели

Вернемся теперь назад и продолжим изучение свободной энергии одноматричной модели, пользуясь введенными выше новыми понятиями<sup>3</sup>. Функции  $G$  и  $y$  (см. (4.10) и (4.13)) определены на двойном накрытии комплексной  $x$ -плоскости, и на каждом листе они имеют скачки вдоль сегментов или разрезов, пропорциональные плотности собственных значений  $\rho(x)$ , зануляющейся вне разрезов (см. рис. 1). Поэтому распределение собственных значений (4.17) может быть описано в терминах периодов производящего дифференциала (A.8)

$$S_\alpha = \oint_{A_\alpha} dS \quad (\text{A.17})$$

<sup>3</sup>Геометрическая формулировка для свободной энергии матричной модели была впервые введена в работе [6] а также обсуждалась позже в [7, 8].

где контурные интегралы вычисляются по контурам, окружающим носители собственных значений  $\mathbf{C}_\alpha$ , которые могут быть идентифицированы (за исключением одного из них, т.е.  $k = 1, \dots, n - 1$ ) с набором канонических  $A$ -циклов на кривой (4.13) (см. рис. 1). Производящий дифференциал с резольвентой (4.4) одноматричной модели может быть эквивалентно выбран в виде

$$dS = \frac{i}{4\pi} y dx \quad (\text{A.18})$$

где теперь  $x$  и  $y$  являются координатами на  $\Sigma$ , определяемой уравнением (4.13), поскольку  $\oint G dx = -\frac{1}{2} \oint y dx$ , см. (4.12)<sup>4</sup>. Как  $x$ , так и  $y$  являются глобально определенными мероморфными функциями на кривой (4.13), поэтому интегралы  $\oint dx = 0$  и  $\oint dy = 0$  очевидно зануляются для любого выбора замкнутых контуров. Соотношения (A.14) естественно выполняются для дифференциала (A.18), когда производные вычисляются при фиксированных вычетах и коэффициентах  $\{t_i\}$  потенциала (1.3).

Теперь, важным фактом является то, что лагранжевы множители (см. (4.18)) могут быть также переписаны как интегралы периодов того же самого производящего дифференциала (A.18), но уже по двойственным  $B$ -контурам (см. опять рис. 1)

$$\Pi_\alpha = -W(x_\alpha^*) + 2 \int_{\mathbf{C}} dx \rho(x) \log(x - x_\alpha^*) \quad (\text{A.19})$$

где точки  $x_\alpha^* \in \mathbf{C}_\alpha$  могут быть выбраны из соображений удобства, причем каждая на  $\alpha$ -й части носителя; при этом можно "забыть" про модуль (см. сноску 1) и величины  $\Pi_\alpha$  становятся голоморфными объектами.

Формула (A.19) может быть легко трансформирована в контурный интеграл (для простоты мы явно выпишем процедуру для случае двух разрезов, как на рис. 2, поскольку ее обобщение очевидно). В этом случае у нас две фракции  $S_1 + S_2 = t_0$  и более удобно взять в качестве независимых переменных  $t_0$  и  $S = S_2$ . Тогда,  $\sum_\alpha \Pi_\alpha S_\alpha = (\Pi_2 - \Pi_1) S + \Pi_1 t_0$  и вариация свободной энергии (4.16) по  $S$  приводит к

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S} = W(x_1^*) - W(x_2^*) + 2 \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbf{C}_\alpha} dx \rho(x) \log \frac{x - x_2^*}{x - x_1^*} \quad (\text{A.20})$$

Поскольку интеграл по контуру  $\oint_{\mathbf{C}} dx G(x) \log \frac{x - x_1^*}{x - x_2^*} = 0$  зануляется (такой контур может быть продеформирован к охватывающему точку  $x = \infty$  в которой у подынтегрального выражения нет вычета), полученная формула может быть приведена к виду (см. рис. 5)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbf{C}_\alpha} dx \rho(x) \log \frac{x - x_1^*}{x - x_2^*} &= \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}_\alpha} dx G(x) \log \frac{x - x_1^*}{x - x_2^*} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{B'} dx G(x) \log \frac{x - x_1^*}{x - x_2^*} = \int_{x_2^*}^{x_1^*} dx G(x) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

<sup>4</sup>Вопрос о вычетах (A.11), (A.12) требует чуть больше аккуратности. Для симметричного выбора (A.18) эти вычеты могут вычисляться в любой из бесконечностей  $x = \infty$ , в то время как в асимметричном случае (4.4) их следует вычислять только на нефизическом листе, где резольвента (4.4) сингулярна.

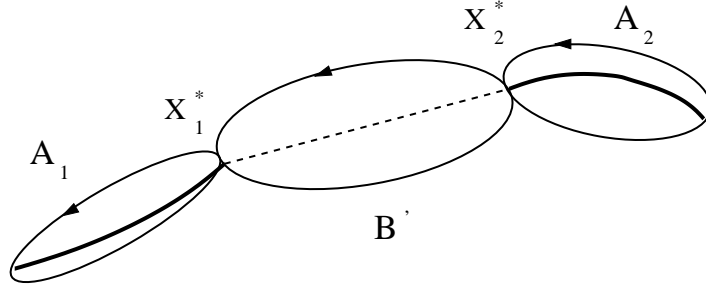


Рис. 5: Вычисление интеграла в формуле (A.21). Интегралы по разрезам  $C_k$  при  $k = 1, 2$  (толстые линии), окруженным  $A_k$ -циклами, заменяются сначала на интеграл по циклу  $B'$ , охватывающему логарифмический разрез (пунктирная линия). Последний же трансформируется в интеграл вдоль контура соединяющего точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$  (но уже без логарифма в подынтегральном выражении), который есть половина периода, вычисленного по  $B$ -циклу, проходящему в одну сторону между разрезами  $C_1$  и  $C_2$  по одному из листов, а в обратную сторону - по другому.

Все вместе это приводит к тому, что производные (A.20) выражаются формулой

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S} = W(x_1^*) - W(x_2^*) - 2 \int_{x_2^*}^{x_1^*} dx G(x) = \int_{x_2^*}^{x_1^*} y dx = -\frac{1}{2} \oint_B y dx = 2\pi i \oint_B dS \quad (\text{A.22})$$

в которой контур  $B$  проходит от  $x_1^*$  к  $x_2^*$  и назад по другому листу кривой (не путать с контуром  $B'$ , охватывающим точки  $x_1^*$  и  $x_2^*$ !). Для произвольного числа разрезов следует аналогично подставить  $\sum_{\alpha=1}^n \Pi_{\alpha} S_{\alpha} = (\Pi_1 - \Pi_n) S_1 + \dots + (\Pi_{n-1} - \Pi_n) S_{n-1} + \Pi_n t_0$  и проделать тот же трюк с логарифмическими разрезами. Эта процедура приводит к тождеству свободной энергии матричной модели с препотенциалом (A.9).

К набору параметров (A.17) следует добавить<sup>5</sup> полное число собственных значений (4.5)

$$t_0 = \frac{1}{2\pi i} \text{res}_{\infty} (dS) = \frac{2f_{n-1}}{(n+1)t_{n+1}} \quad (\text{A.23})$$

которое в точности совпадает с нулевым временем (A.11), и параметры потенциала (1.3), переписывающиеся в виде времен (A.12), т.е.

$$t_k = \frac{1}{2\pi i k} \text{res}_{\infty} (x^{-k} dS), \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{A.24})$$

поскольку  $x$  играет роль обратной локальной координаты в бесконечной точке  $x = \infty$ .

<sup>5</sup>Под точкой  $\infty$  в дальнейшем для краткости будет пониматься точка  $\infty_+$  или  $x = \infty$  на "верхнем" листе гиперэллиптической римановой поверхности (4.13), отвечающем положительному выбору знака квадратного корня т.е. когда  $y = +\sqrt{W'(x)^2 + 4f(x)}$ .

При этом имеем явно

$$d\Omega_0 = \left. \frac{\partial dS}{\partial t_0} \right|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} = (n+1)t_{n+1} \frac{x^{n-1} dx}{y} + 2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial f_k}{\partial t_0} \frac{x^k dx}{y} \quad (\text{A.25})$$

а зависимость коэффициентов  $\{f_k\}$  with  $k = 0, 1, \dots, n-2$  от  $t_0$  фиксируется периодами

$$\oint_{A_\alpha} \left( (n+1)t_{n+1} \frac{x^{n-1} dx}{y} + 2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial f_k}{\partial t_0} \frac{x^k dx}{y} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

которые при  $\alpha = 1, \dots, n-1$  представляют собой в точности  $n-1$  соотношений на производные от  $f_0, f_1, \dots, f_{n-2}$  по  $t_0$ .

Для производных по параметрам потенциала (A.24), получим дифференциалы

$$d\Omega_k = \left. \frac{\partial dS}{\partial t_k} \right|_{\mathbf{s}, t_0} = \frac{W'(x) k x^{k-1} dx}{y} + 2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\partial f_j}{\partial t_k} \frac{x^j dx}{y} \quad (\text{A.27})$$

удовлетворяющие аналогично

$$\oint_{A_\alpha} d\Omega_k = \oint_{A_\alpha} \frac{W'(x) k x^{k-1} dx}{y} + 2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\partial f_j}{\partial t_k} \oint_{A_\alpha} \frac{x^j dx}{y} = 0 \quad (\text{A.28})$$

и это опять приводит к системе линейных уравнений, разрешающихся относительно  $\frac{\partial f_j}{\partial t_k}$ . Для завершения полной картины, к (A.19) следует добавить выражение

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{1}{2\pi i} \text{res}_\infty (x^k dS), \quad k > 0 \quad (\text{A.29})$$

а также следующую формулу <sup>6</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_n} = \Pi_n = \int_{B'_n} dS \quad (\text{A.30})$$

с правильно подобранным контуром  $B'_n$  проходящим из  $\infty_-$  на нижнем листе к  $\infty_+$  на верхнем листе через  $n$ -й разрез (напомним еще раз, что вместо  $t_0$  можно эквивалентно использовать параметр  $S_n = t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} S_\alpha$ ).

<sup>6</sup> Наивно понимаемый интеграл в (A.30) расходится, и его следует доопределить подходящей регуляризацией. Простейший способ обойти эти сложности - рассматривать пару отмеченных точек  $\infty$  и  $\infty_-$  как вырожденную ручку; тогда вычет (A.23) является вырождением дополнительного  $A$ -периода, в то время как интеграл (A.30) наследуется из вырождения дополнительного  $B$ -периода, см. рис. 1. С практической точки зрения этот расходящийся период всегда может быть заменен конечной величиной, см., например, гауссов пример (4.22).

## Список литературы

- [1] A. Marshakov, “Matrix models, complex geometry and integrable systems. I.” Theor. Math. Phys. **147** (2006) 583 [Teor. Mat. Fiz. **147** (2006) 163] [hep-th/0601212].
- [2] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, Commun. Math. Phys. **59** (1978) 35; F. David, Nucl. Phys. **B257**[FS14] (1985) 45; V. Kazakov, Phys. Lett. **150B** (1985) 282.
- [3] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov and A. Orlov, Nucl. Phys. **B357** (1991) 565-618.
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.
- [5] A. A. Migdal, Phys. Rept. **102**, 199 (1983).
- [6] F. David, Phys. Lett. B302 (1993) 403-410, [arXiv:hep-th/9212106].
- [7] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, J. Phys. **A33** (2000) 6739-6768, [arXiv:cond-mat/0003324].
- [8] R. Dijkgraaf and C. Vafa, arXiv:hep-th/0206255; arXiv:hep-th/0207106; arXiv:hep-th/0208048.
- [9] L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov and D. Vasiliev, Phys. Lett. B **562** (2003) 323 [arXiv:hep-th/0301071].
- [10] G. Felder and R. Riser, 'Holomorphic matrix integrals arXiv:hep-th/0401191.
- [11] I. Krichever, Commun. Pure. Appl. Math. **47** (1994) 437, [arXiv:hep-th/9205110].
- [12] J. Fay, *Theta-functions on Riemann surfaces*, Lect. Notes Math. **352**, Springer, N.Y. 1973.