КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция №7: Симметрии в квантовой механике

А.Г. Семенов

I. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ

На предыдущей лекции мы рассмотрели две задачи, которые упрощались при разделении переменных, и нами был замечен тот факт, что данная процедура возможна благодаря существованию некоторых симметрий в соответствующих задачах. С каждым преобразованием симметрии в квантовой механике связан некоторый унитарный оператор $\hat{U}_s$. Рассмотрим некоторую квантовомеханическую систему, и совершим унитарное преобразование $\hat{U}_s$ Гильбертова пространства данной системы. Тогда состояние системы преобразуется как $|\psi'\rangle = \hat{U}_s|\psi\rangle$, а любой оператор $\hat{A}$ после преобразования будет действовать как

$$\hat{A}'|\psi'\rangle = \hat{U}_s\hat{A}|\psi\rangle = \hat{U}_s\hat{A}\hat{U}_s^\dagger|\psi'\rangle \qquad\qquad \hat{A}' = \hat{U}_s\hat{A}\hat{U}_s^\dagger \tag{1}$$

В частности, таким же образом будет преобразовываться и Гамильтониан системы $\hat{H}$. Если после преобразования Гамильтониан не изменился $\hat{H} = \hat{U}_s\hat{H}\hat{U}_s^\dagger$, то о преобразовании, заданном $\hat{U}_s$ говорят как о симметрии соответствующей системы. Поскольку произведение двух преобразований симметрии также является преобразованием симметрии, то можно заметить, что все симметрии системы образуют группу. В зависимости от того, как параметризуются элементы данной группы, симметрии могут быть дискретными и непрерывными. Если какой-то набор состояний системы $|\psi_k\rangle$ при преобразованиях симметрии преобразуется через себя, то это означает, что данный набор состояний образует представление данной группы симметрий. В частности, если взять все собственные вектора Гамильтониана, отвечающие определенному значению энергии, то они обязаны преобразовываться друг через друга при преобразованиях симметрии, а значит образуют представление соответствующей группы симметрии. Давайте рассмотрим несколько примеров.

II. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОТРАЖЕНИЕ

В качестве первого примера рассмотрим оператор пространственного отражения $\hat{P}$, который задается своим действием на собственных состояниях оператора координаты $\hat{P}|x\rangle = |-x\rangle$. Действуя на данное соотношение оператором отражения еще раз получим, что $\hat{P}^2 = 1$. Если Гамильтониан инвариантен относительно данного преобразования $\hat{P}\hat{H}\hat{P} = \hat{H}$, и его собственные состояния невырождены (как, например, в одномерной системе), то все собственные состояния удовлетворяют соотношению $\hat{P}|n\rangle = e^{i\alpha}|n\rangle$. Действуя еще раз оператором $\hat{P}$ получим, что $e^{2i\alpha} = 1$, а значит состояния системы могут быть либо симметричными $\hat{P}|n\rangle = |n\rangle$, либо антисимметричными $\hat{P}|n\rangle = -|n\rangle$. Данная симметрия является простейшим примером дискретной симметрии.

III. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТРАНСЛЯЦИИ

Следующим нашим примером будет простейшая непрерывная симметрия - пространственные трансляции. Сдвиг системы задается оператором, зависящим от одного параметра, опять же, своим действием на собственные состояния оператора координаты $\hat{U}_t(a)|x\rangle = |x+a\rangle$. Если система состоит из нескольких частиц, то сдвинуть необходимо одновременно координаты всех частиц. Рассмотрим инфинитезимальное преобразование

$$\hat{U}_t(\delta a) \approx 1 - i\hat{g}_t\delta a + ... \tag{2}$$

Оператор $\hat{g}$ называется генератором соответствующей симметрии. Из определения следует, что

$$\hat{U}(a)\hat{x}\hat{U}(-a) = \hat{x} - a, \qquad [\hat{g}_t, \hat{x}] = -i. \tag{3}$$

Таким образом, оператор импульса является генератором трансляций. В случае, когда система состоит из нескольких частиц, генератором будет сумма импульсов всех частиц $\hat{p} = \sum_k \hat{p}_k$. При этом несложно видеть, что оператор трансляции имеет вид $\hat{U}(a) = e^{-i\hat{p}a}$. В случае, когда система инвариантна относительно таких преобразований Гамильтониан не преобразуется, а значит $[\hat{g}, \hat{H}] = 0$. Таким образом, с каждой непрерывной симметрией связана наблюдаемая, коммутирующая с Гамильтонианом, или, иными словами, сохраняющаяся величина. Именно этот факт позволяет при наличии симметрий в системе производить процедуру разделения переменных.

IV. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ

Еще одним примером непрерывной симметрии является вращательная инвариантность системы. Оператор преобразования вращения на угол φ двумерной плоскости относительно начала координат задается в виде

$$\hat{U}_r(\varphi)|x, y\rangle = |x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi), x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)\rangle \tag{4}$$

Совершенно аналогично рассмотренному выше случаю вводим генератор вращений как

$$\hat{U}_r(\varphi) \approx 1 - i\hat{g}_r\delta\varphi + ..., \tag{5}$$

и получаем коммутационные соотношения из условий

$$\hat{U}_r(\varphi)\hat{x}\hat{U}_r(-\varphi) = \hat{x}\cos(\varphi) + \hat{y}\sin(\varphi), \tag{6}$$

$$\hat{U}_r(\varphi)\hat{y}\hat{U}_r(-\varphi) = -\hat{x}\sin(\varphi) + \hat{y}\cos(\varphi). \tag{7}$$

в виде

$$[\hat{g}_r, \hat{x}] = i\hat{y}, \qquad [\hat{g}_r, \hat{y}] = -i\hat{x}. \tag{8}$$

Таким образом соответствующим генератором является оператор углового момента $\hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$. Совершенно аналогично можно рассмотреть вращения трехмерного пространства и получить, что группа содержит три генератора вращений (вокруг каждой из осей)

$$\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \qquad \hat{l}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \qquad \hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \tag{9}$$

При этом, в отличие от всех рассмотренных ранее случаев, генераторы не коммутируют между собой

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z \qquad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x \qquad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hat{l}_y \tag{10}$$

и соответствующая группа симметрий является неабелевой. Заметим, что у данной алгебры существует оператор Казимира (элемент коммутирующий со всеми элементами алгебры), который равен

$$\hat{L}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2. \tag{11}$$

В заключение отметим, что генератором вращений относительно произвольной оси, заданной единичным вектором $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ является $\hat{l}_{\vec{n}} = n_x\hat{l}_x + n_y\hat{l}_y + n_y\hat{l}_y$.