КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция №8: Угловой момент в квантовой механике

А.Г. Семенов

I. ОПЕРАТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

На предыдущей лекции было показано, что в случае, когда в системе присутствует симметрия относительно вращений, существует сохраняющаяся величина - момент импульса, который в свою очередь является генератором соответствующего преобразования. В трехмерном пространстве оператор момента импульса имеет три компоненты - $\hat{l}_x,\ \hat{l}_y,\ \hat{l}_y$, которые не коммутируют между собой

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z, \qquad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x, \qquad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hat{l}_y, \tag{1}$$

а значит группа вращений трехмерного пространства является неабелевой. Заметим, что у данной алгебры существует оператор Казимира (элемент коммутирующий со всеми элементами алгебры), который равен

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2, \tag{2}$$

и является оператором квадрата момента импульса. Если система инвариантна относительно вращений, то её Гамильтониан коммутирует со всеми тремя данными операторами и с оператором Казимира. Это означает, что существует общий набор собственных состояний у Гамильтониана, одной из проекций момента импульса и оператора Казимира. Как было отмечено на предыдущей лекции, каждое подпространство Гильбертова пространства, отвечающее определенному собственному значению Гамильтониана реализует представление соответствующей группы симметрии системы. Давайте исследуем, какие существуют представления у группы вращений, а значит и то, как устроены состояния, отвечающие тому или иному значению момента импульса. Поскольку операторы проекций момента импульса не коммутируют между собой, но коммутируют с квадратом момента импульса, то будем строить общую систему собственных состояний операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$.

II. СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ $\hat{l}^2$ И $\hat{l}_z$

Для построения собственных состояний $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ введем новые операторы

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \qquad \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y = \hat{l}_+^\dagger, \tag{3}$$

причем

$$[\hat{l}_+, \hat{l}_z] = -\hat{l}_+, \qquad [\hat{l}_-, \hat{l}_z] = \hat{l}_-, \qquad [\hat{l}_-, \hat{l}_+] = -2\hat{l}_z. \tag{4}$$

Рассмотрим некоторое собственное состояние $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ с собственными значениями

$$\hat{l}^2|l,m\rangle = C_l|l,m\rangle, \qquad \hat{l}_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle. \tag{5}$$

В силу коммутационных соотношений состояния $\hat{l}_\pm|l,m\rangle$ также являются собственными для $\hat{l}_z$. Действие же любого из операторов $\hat{l}_k$ не изменяет значения C_l. При этом $\hat{l}_+$ повышает значение m, а $\hat{l}_-$ понижает значение m на единицу. Действуя данными операторами мы можем прийти к состояниям с максимальным $m = m_{max}$ и с минимальным $m = m_{min}$, причем $\hat{l}_+|l, m_{max}\rangle = 0 = \hat{l}_-|l, m_{min}\rangle$. Ограниченность m связана с тем, что для любого состояния $|\psi\rangle$ выполнено неравенство $\langle\psi|\hat{l}^2|\psi\rangle \geq \langle\psi|\hat{l}_z^2|\psi\rangle$. Переписывая $\hat{l}^2$ через $\hat{l}_{\pm,z}$ как

$$\hat{l}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_-\hat{l}_+\right) + \hat{l}_z^2 = \hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_z^2 - \hat{l}_z = \hat{l}_-\hat{l}_+ + \hat{l}_z^2 + \hat{l}_z \tag{6}$$

получаем соотношение

$$C_l = m_{max}^2 + m_{max} = m_{min}^2 - m_{min}. \tag{7}$$

Единственным решением данного соотношения является $m_{max} = -m_{min} \equiv l$. Кроме этого $m_{max} - m_{min}$ по построению является целым числом, а значит l может быть только целым или полуцелым. Подводя итог получаем, что все возможные собственные состояния классифицируются двумя числами: $l \geq 0$, которое может принимать целые или полуцелые значения и m, которое меняется от $-l$ до l с шагом единица. При этом $\hat{l}^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$, $\hat{l}_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle$, а операторы $\hat{l}_\pm$ связывают состояния с ближайшими m

$$\hat{l}_+|l,m\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l,m+1\rangle, \tag{8}$$

$$\hat{l}_-|l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l,m-1\rangle. \tag{9}$$

Давайте применим полученные результаты к описанию движения частицы в центральном поле.

III. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

В качестве первого примера использования полученных результатов давайте рассмотрим частицу в центральном поле. В этом случае в координатном представлении Гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H} = -\frac{\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}{2m} + V(\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}). \tag{10}$$

В данной задаче можно разделить переменный при помощи перехода к сферическим координатам

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \qquad z = r\cos(\theta). \tag{11}$$

При этом алгебра операторов момента импульса реализуется через дифференциальные операторы, действующие не угловые переменные. Они будут иметь следующий вид

$$\hat{l}_x = i\left(\sin(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\varphi)\partial_\varphi\right) \tag{12}$$

$$\hat{l}_y = i\left(-\cos(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\sin(\varphi)\partial_\varphi\right) \tag{13}$$

$$\hat{l}_z = -i\partial_\varphi \tag{14}$$

$$\hat{l}^2 = -\partial_\theta^2 - \cot(\theta)\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\partial_\varphi^2 \tag{15}$$

$$\hat{l}_+ = e^{i\varphi}\left(\partial_\theta + i\cot(\theta)\partial_\varphi\right) \tag{16}$$

$$\hat{l}_- = e^{-i\varphi}\left(-\partial_\theta + i\cot(\theta)\partial_\varphi\right) \tag{17}$$

И при этом Гамильтониан в сферических координатах примет вид

$$\hat{H} = -\frac{\partial_r^2}{2m} - \frac{\partial_r}{mr} + \frac{\hat{l}^2}{2mr^2} + V(r). \tag{18}$$

Давайте найдем собственные функции операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ в данном представлении. Обозначим их как $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Мы уже показали тот факт, что они удовлетворяют уравнениям

$$\hat{l}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad \hat{l}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = mY_{lm}(\theta,\varphi). \tag{19}$$

Второе уравнение легко решается, причем из 2π периодичности по φ следует что m и l могут принимать только целые значения. Таким образом

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\theta) \tag{20}$$

а функция $\Theta_{lm}(\theta)$ удовлетворят уравнению

$$\partial_\theta^2 \Theta_{lm}(\theta) + \cot(\theta)\partial_\theta \Theta_{lm}(\theta) + (l(l+1)\sin^2(\theta) - m^2)\Theta_{lm}(\theta) = 0 \tag{21}$$

Однако, вместо решения данного уравнения заметим, что мы можем построить все состояния действуя оператором $\hat{l}_-$ на $Y_{ll}(\theta, \varphi)$. При этом $\hat{l}_+ Y_{ll}(\theta, \varphi)$, что эквивалентно уравнению

$$\partial_\theta \Theta_{ll}(\theta) = l \cot(\theta) \Theta_{ll}(\theta), \tag{22}$$

которое имеет решение

$$\Theta_{ll}(\theta) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \sin^l(\theta). \tag{23}$$

Все остальные состояния получаются действием $\hat{l}_-$:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} \hat{l}_-^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi). \tag{24}$$