

Алгебра, семинар 25–29 января: решетки

1. (Повторение)

- a)** Какие из групп $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ изоморфны?
- b)** Представьте группу $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ как фактор решетки минимально возможной размерности.
- c)** Классифицируйте абелевы группы порядка 48.
- d)** Сколько существует абелевых групп порядка 10000?

2. (Повторение) **a)** Докажите, что каждая подгруппа абелевой группы нормальна. **b)**[×] Верно ли обратное? **c)** Докажите, что в абелевой группе порядка n найдется подгруппа каждого порядка, делящего n . **d)**[×] Верно ли это для неабелевых групп?

3. **a)** Дополните вектор $(2, 3, 4)$ до базиса в \mathbb{Z}^3 .

- b)** Опишите абелеву группу с образующими a, b, c и соотношениями
$$\begin{cases} 2a + b - 50c = 0 \\ 11a + 5b + 60c = 0 \end{cases}.$$

c) Дополните вектор $(2, 3, 4, 5)$ до базиса в \mathbb{Z}^4 .

d) Дополните вектора $(1, 2, 3)$ и $(4, 5, 6)$ до базиса в \mathbb{Z}^3 либо докажите, что это невозможно.

e) Та же задача для $(1, 2, 3)$ и $(4, 4, 5)$.

f) Решите в целых числах систему
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
 и опишите фактор \mathbb{Z}^3 по пространству решений.

g) Решите в целых числах уравнение $6x + 10y + 15z = 0$ и опишите фактор \mathbb{Z}^3 по пространству решений.

h) Решите в целых числах систему
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 4y + 5z + 5u = 0 \end{cases}$$
 и опишите фактор \mathbb{Z}^4 по пространству решений.