Алгебра, листок 7 (крайний срок сдачи – 1 марта)

В этом листке не разрешается опираться ни на какие сведения о линейных операторах, кроме определения: в т.ч. на теорему Гамильтона–Кэли, существование нормальных форм и т.д.

1. Докажите, что у каждого линейного оператора в конечномерном векторном пространстве над замкнутым полем есть **a)** собственный вектор и **b)** инвариантная гиперплоскость.
c) Покажите, что если отказаться от конечномерности или замкнутости, собственный вектор может не существовать.

2. Если линейные операторы коммутируют, то **a)** каждый из них сохраняет ядро и образ другого, и **b)** в комплексном конечномерном случае у них есть общий собственный вектор. **c)**$^\times$ Если $\mathrm{rk}(AB - BA) = 1$, то у комплексных матриц A и B есть общий собственный вектор.

3. Докажите диагонализуемость и перечислите все инвариантные подпространства оператора в n-мерном пространстве, у которого n различных собственных чисел.

4. Докажите диагонализуемость следующих операторов (не предполагая конечномерность!); опишите, какие у них бывают собственные числа, и какие наборы подпространств могут оказаться наборами их собственных подпространств: **a)** идемпотентный оператор (такой что $F^2 = F$), **b)** квадратный корень из единицы (такой что $F^2 = \mathrm{Id}$) над полем характеристики $\neq 2$ и **c)**$^\times$ корень из единицы произвольной степени над $\mathbb{C}$. **d)** Приведите пример недиагонализуемого корня из единицы, **e)**$^\times$ даже квадратного.

5. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ – фиксированная диагональная матрица с попарно различными собственными значениями. Найдите собственные значения и собственные пространства оператора $f : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, такого что **a)** $f(X) = X + X^t$, **b)** $f(X) = AX$, **c)** $f(X) = AX - XA$, **d)** $f(X) = A^{-1}XA$. **e)** Найдите собственные значения и размерности собственных пространств этих операторов, если A – произвольная диагонализуемая матрица с n попарно различными собственными значениями.

6. Докажите (не используя никаких сведений о линейных операторах, кроме определения):
a) Характеристический многочлен оператора $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ равен $t^2 \quad \Leftrightarrow \quad F^2 = 0$.
b) В условиях прошлого пункта $F \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ матрица F в подходящем базисе равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Характеристический многочлен $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ равен $(t - a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (F - a \cdot \mathrm{Id})^2 = 0$.
d) В условиях прошлого пункта матрица F в подходящем базисе равна $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
e) Характеристический многочлен оператора $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ равен $(x - a)(x - b)$, $a \neq b \quad \Leftrightarrow$ матрица F в подходящем базисе равна $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \neq b \quad \Rightarrow \quad (F - a \cdot \mathrm{Id})(F - b \cdot \mathrm{Id}) = 0$, $a \neq b$.
f) Если характеристический многочлен $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ разлагается на линейные множители, то к нему применим один из прошлых пунктов, а если нет, то F имеет собственные векторы $u \pm iv$ с собственными числами $a \pm ib$, $b \neq 0$, и матрица F в базисе (u, v) равна $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
g) Существует оператор $F : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$, матрица которого ни в каком базисе не равна ни одной из выше указанных. Он является корнем своего характеристического многочлена.
h) Все примеры из прошлого пункта сопряжены друг другу.
i)$^\times$ Опишите все классы сопряженности операторов $F : \mathbb{F}_p^2 \to \mathbb{F}_p^2$ для простого p.

7. Пусть $f : V \to V$ – линейный оператор. Докажите, что **a)** $\mathrm{Ker} f^k \subset \mathrm{Ker} f^{k+1} = f^{-1}(\mathrm{Ker} f^k)$, и **b)** $f : \mathrm{Ker} f^{k+1}/\mathrm{Ker} f^k \to \mathrm{Ker} f^k/\mathrm{Ker} f^{k-1}$ – вложение.
c) При $\dim V < \infty$ докажите, что $0 \leqslant \dim \mathrm{Ker} f^{k+1} - \dim \mathrm{Ker} f^k \leqslant \dim \mathrm{Ker} f^k - \dim \mathrm{Ker} f^{k-1}$, т.е. последовательность чисел $\dim \mathrm{Ker} f^k$ неубывающая и выпуклая.
d) Обратно, докажите, что для всякой неубывающей выпуклой последовательности чисел $d_k \leqslant \dim V$, $d_0 = 0$, существует оператор $f : V \to V$, такой что $\dim \mathrm{Ker} f^k = d_k$.
e) Докажите, что если $f^N = 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$ (т.е. f – нильпотентен), то $f^{\dim V} = 0$.

8. Если две вещественные матрицы сопряжены над $\mathbb{C}$, обязательно ли они сопряжены над $\mathbb{R}$?

9. Существует ли оператор $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющий единственное нетривиальное инвариантное пространство? Какой может быть его размерность?