Прикладные методы анализа II

ВШЭ, 2-й семестр 2015/2016 гг.

Примерный план курса:

1. Асимптотические вычисления:
- понятие асимптотического разложения;
- асимптотика корней трансцендентных уравнения;
- асимптотика интегралов Лапласа и Фурье;
- метод перевала;
- формула Эйлера-Маклорена;
- формулы Стирлинга и асимптотики Г-функции.

2. Специальные функции математической физики:
- функция Эйри и ее приложения;
- функции Бесселя и их приложения;
- гипергеометрические функции;
- вырожденные гипергеометрические функции;
- ортогональные многочлены.

А также, при наличии времени, возможно:
- ζ функция Римана и преобразование Меллина;
- симметрические функции ми многочлены Макдональда.

Порядок работы. В конце каждой лекции будет выдаваться небольшое количество задач (1-3), которые, как правило, будут разбираться на следующем занятии. Курс заканчивается устным экзаменом. Участие в решении задач существенно влияет на его результат.

Литература. Имеется обширная литература по асимптотическим методам анализа, напр.:
Копсон, Асимптотические разложения,
Олвер, Асимптотика и специальные функции,
Федорюк, Метод перевала,

По специальным функциям классическими учебниками являются:
Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, том 2,
Никифоров, Уваров, Специальные функции математической физики,
Бейтмен, Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т 1,2,3. и другие

1. Асимптотические разложения

Занятие 1

1.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим несобственный интеграл $G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ как функцию параметра x. Заменяя под знаком интеграла $(1+t)^{-1}$ на соответствующий ряд Тэйлора, приходим к выражению

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}t^n dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^n}{x^{n+1}}d(xt) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} =$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Получили ряд, расходящийся при любом x, отличном от нуля, что говорит о неправомерности приведенных рассуждений. Этого можно было ожидать, поскольку используемое разложение имеет место не на всем промежутке интегрирования. Повторим те же вычисления с конечной частью ряда Тэйлора функции $(1+t)^{-1}$. По формуле суммы геометрической прогресии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t},$$

поэтому

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^\infty e^{-tx}t^k dt + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

Последнее слагаемое

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

представляет собой ошибку приближения функции $G(x)$ конечным рядом $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$. Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Re} x = a > 0$

$$|R_n(x)| < \int_0^\infty t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

В частности, если x – действительное положительное число, что мы и предположим далее для простоты изложения, то $|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$ и этот остаток имеет знак $(-1)^n$.

Изучим поведение ошибки в зависимости от n и x.

а) Фиксируем n. Тогда с ростом x остаток $R_n(x)$ стремится к нулю.

б) Фиксируем x. Ошибка уменьшается с ростом n, пока n не превосходит целой части $[x]$ числа x. Затем ошибка $R_n(x)$ начинает расти. В самом деле, $\dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{2}{x} \cdots \dfrac{n}{x}$, и при $n > x$ каждый множитель, начиная с $[x]+1$-го, больше единицы.

Таким образом, любое численное приближение интеграла имеет ошибку, не меньшую $\varepsilon(x) = \dfrac{[x]!}{x^{[x]}}$. Она весьма мала при больших x. Например, при $x = 10$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-3}$, а при $x = 100$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-40}$, что говорит о том, что приближения получаются очень хорошими, несмотря на неустранимые ошибки.

Приведенный способ вычислений был аксиоматизирован А.Пуанкаре в 1890 г.

1.2. **Подход Пуанкаре.** *Определение*. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{D}$ - предельная точка D. Последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n \geq 1$, $z \in D$ называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$ в D, если все $\varphi_n(z)$ определены в D и для всякого $n \geq 1$ $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \to z_0$.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ - асимптотическая последовательность. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \to z_0$ в D, $f(z) \sim \sum\limits_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$, если для всякого $n \geq 1$ выполнено соотношение

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \to z_0, \quad z \in D.$$

Напомним символику бесконечно малых.

1. $f(z) \sim g(z)$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z\to z_0, z\in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$.

2. $f(z) = o(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z\to z_0, z\in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$.

3. $f(z) = O(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ограничено в пересечении некоторой окрестности z_0 с D.

Например, функция $\operatorname{th} z$ есть $o(1)$ при $z \to \infty$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. В самом деле,

$$\operatorname{th} z = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}$$

и при $|z| > R$ с учетом $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$ верно неравенство $\operatorname{Re} z > |z|/\sin\delta$. Поэтому при стремлении z к бесконечности в указанной области $\operatorname{Re} z$ также стремится к бесконечности; соответственно, $|e^{-z}|$ стремится к нулю.

Однако, это не так в области $\operatorname{Re} z > 0$, поскольку в этом случае при стремлении z к бесконечности $\operatorname{Re} z$ может сколь угодно мало отличаться от нуля, так что $|e^{-z}|$ к нулю не стремится.

Наиболее часто используются степенные асимптотические последовательности, например, $\varphi_n(z) = z^n$ при $z_0 = 0$ или $\varphi_n(z) = z^{-n}$ при $z_0 = \infty$. Если функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение по заданной системе функций, то его коэффициенты единственны. В самом деле, из определения имеем при $z \to z_0$, $z \in D$

$$f(z) - a_1\varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_1 = \lim_{z\to z_0,\, z\in D} \frac{f(z)}{\varphi_1(z)},$$

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_n = \lim_{z\to z_0,\, z\in D} \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}$$

Можно также заметить, что при наличии асимптотического разложения выполнена более точная оценка ошибки:

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z))$$

при $z \to z_0$ и $z \in D$, что можно использовать как другой вариант определения.

С другой стороны, функция не определяется своим асимптотическим разложением; различные функции могут иметь одно и тоже асимптотическое разложение. Например, функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ имеет нулевое асимптотическое разложение в нуле по степеням z,

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim 0 + 0\cdot z + ... + 0\cdot z^n + ... \qquad z \to 0$$

поскольку убывает при $z \to 0$ быстрее любой степени z.

Формула Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + o(z^{n+1})$$

говорит, что всякая функция, бесконечно дифференциируемая в нуле, имеет свой ряд Тэйлора в качестве асимптотического разложения (вне зависимости от его сходимости). Однако, понятие асимптотического разложения шире формулы Тэйлора: во-первых, можно брать иные асимптотические последовательности, например,

$$\varphi_1(z) = z^{-2}, \varphi_2(z) = z^{-1}, \dots, \varphi_n(z) = z^{n-3}, ..., \qquad z_0 = 0.$$

Тогда фунции, допускающие асимптотическое разложение по этой системе, могут стремиться к ∞ при $z \to 0$ и тем самым не иметь никаких производных в нуле. Во-вторых, как правило, асимптотические разложения рассматриваются в секторах или полуплоскостях типа $\operatorname{Re} z > 0$ и не контролируют поведение функции вне этих секторов.

Задачи 14.01.2016

1. Покажите, что функция e^z имеет нулевое асимптотическое разложение по степеням $1/z$ при $z \to \infty$ в секторе $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и не имеет такового в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

2. Набор функций

$$1, \frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x^n}, ..., \qquad \ln x, \frac{\ln x}{x}, ..., \frac{\ln x}{x^n}, ..., \qquad \ln^2 x, \frac{\ln^2 x}{x}, ..., \frac{\ln^2 x}{x^n}, ...,$$

выстроить d асимптотическую последовательность при $x \to \infty$, $x > 0$.

3. Известно, что гармонический ряд $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ расходится. Более того, сумма его первых N членов приблизительно равна $\ln N$. Еще точнее,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n} - \ln N = \gamma,$$

где γ -постоянная Эйлера-Маскерони $\gamma = 0,57721......$ Вычислить следующий член асимптотического разложения частичной суммы гармонического ряда, т.е., найти такое α, что

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \frac{\alpha}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Занятие 2

1.3. **Приближенное нахождение нулей трансцендентных уравнений.** *Пример.* Трансцендентное уравнение $x \sin x = 1$ имеет бесконечно много корней. При больших x n-ный корень ведет себя как $x = \pi n + o(1)$. Уточним его поведение. Положим $x = \pi n + \alpha_n$, где $\alpha_n = o(1)$ и подставим это выражение в соотношение $\sin x = x^{-1}$. Пользуясь рядами Тейлора для функций $\sin x$ и $(1 + x)^{-1}$, получаем:

$$\sin x = (-1)^n (\alpha_n + o(\alpha_n)) = \frac{1}{\pi n + \alpha_n} = \frac{1}{\pi n (1 + \alpha_n/\pi n)} = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{\alpha_n}{\pi n} + o\left(\frac{\alpha_n}{\pi n}\right)\right).$$

Правая часть имеет вид

$$\frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

поэтому, глядя на левую часть, заключаем, что $\alpha_n = (-1)^n/(\pi n) + \beta_n$, где $\beta_n = o(1/n)$. Подставим вновь полученное выражение в предыдущее равенство, воспользовавшись следующим членом в ряде Тэйлора для синуса, получим

$$(-1)^n \left((-1)^n \frac{1}{\pi n} - (-1)^n \frac{1}{6(\pi n)^3} + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

откуда получаем, что $\beta_n = -\frac{1}{6(\pi n)^3} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, так что

$$x = \pi n + (-1)^n \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{6(\pi n)^3} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Итерируя процесс, можем получить полное асимптотичское разложение корня по n.

Задачи 21.01.2016

1. Найти несколько первых членов асимптотики корня уравнения $x^2 = \lambda + \log x$ при больших значениях параметра λ ($\lambda \to +\infty$).

Замечание. Решение задачи подразумевает и подбор асмптотической последовательности элементарных функций, пригодной для исследования этого уравнения.

2. а) Найдите несколько первых членов асимптотического разложения при $\lambda \to +\infty$ положительного корня уравнения $x^3 - 3x = \lambda^3$

б)* Найдите все коэффициенты асимпотического разложения

в)* То же для уравнения $x^5 - 5x = \lambda^5$.

Занятие 3

Найдем первые два нетривиальных члена асимптотики положительного корня кубического уравнения

$$x^3 - 3x = \lambda^3.$$

При $x > 1$ функция $f(x) = x^3 - 3x$ монотонно возрастает и

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda < \lambda^3, \qquad \text{а} \qquad f(\lambda+1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2 > \lambda^3 \qquad \text{при } \lambda > 1.$$

Значит, при больших положительных λ уравнение $x^3 - 3x = \lambda^3$ имеет корень x, такой что

$$\lambda < x < \lambda + 1.$$

Запишем этот корень в виде $x = \lambda + \alpha$. Мы уже знаем, что α ограничено при $\lambda \to \infty$, $\alpha = O(1)$. Разделим получившееся уравнение

$$3\lambda^2\alpha + 3\lambda\alpha^2 + \alpha^3 - 3\lambda - 3\alpha = 0$$

на λ^2:

$$3\alpha + 3\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\alpha^3 - 3\alpha}{\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda} = 0$$

на λ^2 и устремим λ к бесконечности. Поскольку $\alpha = O(1)$, предел всех слагаемых, кроме первого, равен нулю. Значит, $\lim_{\lambda\to\infty} \alpha = 0$, т.е., $\alpha = o(1)$ при $\lambda \to \infty$. Используем это для более точной оценки, разделив исходное уравнение не на λ^2, а на λ:

$$3\alpha\lambda + 3\alpha^2 + \frac{\alpha^3 - 3\alpha}{\lambda} - 3 = 0,$$

Теперь рассмотрение предела при $\lambda \to \infty$ показывает, что $\lim_{\lambda\to\infty} \alpha\lambda = 1$. Таким образом,

$$x = \lambda + \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Подойдем теперь к задаче с другой стороны, воспользовавшись известными формулами решения кубических уравнений. Они происходят из тригонометрической формулы

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \qquad \text{или} \qquad 2\cos 3x = (2\cos x)^3 - 3(2\cos x).$$

Таким образом, замена $x = 2\cos t$ приводит к уравнению

$$2\cos 3t = \lambda^3.$$

Однако, такое уравнение при больших λ не имеет вещественных корней, поэтому имеет смысл перейти к гиперболическим функциям $x = 2\operatorname{ch} t$, $2\operatorname{ch} 3t = \lambda^3$. В терминах переменной $z = e^t$ исходное кубическое уравнение переписывается в систему

$$x = z + \frac{1}{z}, \qquad z^3 + \frac{1}{z^3} = \lambda^3,$$

до которой можно додуматься и непосредственно. Интересующий нас большой положительный корень теперь имеет вид

$$x = \sqrt[3]{\frac{\lambda^3 + \sqrt{\lambda^6 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\lambda^3 - \sqrt{\lambda^6 - 4}}{2}} = \lambda\left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{1 - 4/\lambda^6}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{1 - 4/\lambda^6}}{2}}\right)$$

Выражение в скобках при больших λ раскладывается в сходящийся ряд Тейлора по λ^{-1}, начинающийся с $1 + \lambda^{-2}$. Таким образом, мы подтверждаем предыдущие вычисления и убеждаемся при этом, что искомое асимптотическое разложение корня кубического уравнения на самом деле представляется сходящимся рядом.

1.4. **Оценка интеграла интегрированием по частям.** Другой пример асимптотического разложения предоставляет оценка интеграла интегрированием по частям.

Рассмотрим, например, функцию распределения нормальной гауссовой случайной величины,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Задача - исследовать $\Phi(x)$ при больших положительных x, $\Phi(x) = 1 - ?$. Задача, тем самым, сводится к исследованию асимптотического поведения при больших x интеграла $F(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Воспользуемся для этого интегрированием по частям:

$$F(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2}}^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2}}^\infty de^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-u} |_{\frac{x^2}{2}}^\infty - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2}}^\infty e^{-u} u^{-3/2} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-u} u^{-3/2} |_{\frac{x^2}{2}}^\infty + \frac{3}{4\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2}}^\infty e^{-u} u^{-5/2} du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2}}^\infty e^{-u} u^{-5/2} du.$$

Оценим последний интеграл . Экспонента в нем не превышает своего крайнего значения, равного $e^{-\frac{x^2}{2}}$, оставшийся интеграл от степенной функции считается, так что этот интеграл не превышает

$$\frac{e^{-x^2/2}}{2\sqrt{2}x^3}.$$

и имеет, так же как и предыдущий член, порядок $O(x^{-3} e^{-x^2/2})$. Таким образом,

$$F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3} \right) \right).$$

Задачи 27.01.2016

1. Найти следующий член асимптотического разложения большого положительного корня уравнения $x^3 - 3x = \lambda^3$.
2. Получить полное асимптотическое разложение интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

при больших положительных x.

Занятие 4

Исследуем асимптотику интеграла Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty \cos u^2 du$ как функцию нижнего предела. Сделаем замену переменных и проинтегрируем по частям:

$$F(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{x^2}^\infty t^{-1/2} \cos t dt = \frac{1}{2} \int\limits_{x^2}^\infty t^{-1/2} d \sin t = \frac{1}{2} t^{-1/2} \sin t \Big|_{x^2}^\infty + \frac{1}{4} \int\limits_{x^2}^\infty t^{-3/2} \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2} \int\limits_{x^2}^\infty t^{-3/2} d \cos t \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2} \frac{\cos x^2}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \int\limits_{x^2}^\infty t^{-5/2} \cos t dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2} \frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{2^{2n}} \frac{\sin x^2}{x^{4n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)!!}{2^{2n+1}} \frac{\cos x^2}{x^{4n+3}} + R_n \right),$$

где $R_n = \dfrac{(-1)^n(4n+5)!!}{2^{2n+2}}\displaystyle\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt$. Оценим последний интеграл, заменив $\cos t$ на 1:

$$\left|\int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt\right| < \int\limits_{x^2}^{\infty} t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)} dt = \frac{2}{4n+3}\frac{1}{x^{4n+3}}.$$

В этой оценке остаток имеет порядок последнего слагаемого рассмотренного пртближения интеграла Френеля $F(x)$. Объединив теперь R_n с этим последним слагаемым, получим оценку

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{\sin x^2}{x^{4n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{4n+3}}\right),$$

которая означает, что при $x \to +\infty$ функция $F(x)$ допускает асимптотическое разложение вида

$$F(x) \sim \sin x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-4n-1}\right) + \cos x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-4n-3}\right),$$

которое обычно записывают в виде

$$F(x) \sim -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-2n-1}\sin\left(x^2 - n\frac{\pi}{2}\right).$$

Формально система функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k, \\ \dfrac{\cos x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad n \geq 0,\ x \to +\infty$$

не является асимптотической последовательностью при $x \to +\infty$ в смысле Пуанкаре, поскольку отношение $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ равно либо $x^{-2}\operatorname{tg} x^2$, либо $x^{-2}\operatorname{ctg} x^2$ в зависимости от четности n и не имеет за счет тригонометрических множителей предела при $x \to +\infty$. Однако, разложение дает хорошую степенную оценку остатка порядка x^{-2n-2} и вполне может быть использовано для приближенных вычислений и асимптотичекого анализа. Для работы с такими разложениями определение Пуакаре можно модифицировать двумя способами (и оба они используются!).

1-ый способ. Разрешим переменные коэффициенты асимптотического разложения, наложив лишь условие их ограниченности в окрестности предельной точки. Иными словами, для асимптотической последовательности $f_n(x)$, $x \to x_0$, $x \in D$, будем рассматривать приближения вида

$$f(x) = a_1(x)f_1(x) + \cdots + a_n(x)f_n(x) + o(f_n(x)),$$

где каждый коэффициент $a_k(x)$ ограничен в некоторой окрестности точки x_0. В нашем примере $x_0 = +\infty$, $D = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^{-2n-1}$, $a_n(x)$ есть линейная комбинация $\cos x^2$ и $\sin x^2$. Соответствующий смысл вкладывается и в асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) f_k(x), \qquad , x \to x_0,\ x \in D.$$

2-ой способ. Можно допустить <u>составные</u> асимптотические разложения (с постоянными коэффициентами) вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k g_k(x), \qquad , x \to x_0,\ x \in D,$$

где $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ – разные асимптотические последовательности. В нашем примере

$$f_n(x) = \frac{\sin x^2}{x^n}, \qquad g_n(x) = \frac{\cos x^2}{x^n}.$$

Этот подход, помимо прочего, позволяет увеличивать область применимости асимптотического разложения.

1.5. **Асимптотика интеграла Лапласа.** Пусть $f(t)$ – функция действительного аргумента $t > 0$ такая, что интеграл

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt \tag{1.1}$$

(преобразование Лапласа функции $f(t)$) абсолютно сходится при больших действительных $x > 0$. Для этого достаточно потребовать, например, существования конечного интеграла $\int_0^\infty |f(t)|e^{-x_0 t}dt = M$ для некоторого $x_0 > 0$.

Все асимптотические свойства интеграла Лапласа (1.1) основаны на следующей оценке:

Лемма Ватсона. Пусть функция $f(t)$ такова, что

а) интеграл $\int_0^\infty |f(t)|e^{-x_0 t}dt = M$ конечен для некоторого $x_0 > 0$;

б) $f(t) = O(t^a)$ при $t \to 0$ для некоторого $a > -1$.

Тогда $\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right)$ при $x \to \infty$, $\operatorname{Re} x > 0$ (более точно: если x стремится к бесконечности, оставаясь внутри некоторого сектора $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$).

Доказательство. Разобьем интеграл на две части:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = \int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt + \int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt,$$

где ε - произвольное малое положительное число. Оценим вначале второй интеграл при $\operatorname{Re} x > x_0$:

$$\left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-x_0 t}e^{-(x-x_0)t}dt\right| < M|e^{-(x-x_0)\varepsilon}| = Me^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\varepsilon} = \widetilde{M}e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x},$$

где $\widetilde{M} = Me^{-\operatorname{Re} x_0}$. Если x стремится к бесконечности внутри указанного сектора, то при фиксированном ε интеграл $e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x}$ стремится к нулю быстрее любой степени x, т.е., $\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt = o(x^{-n})$ для всех n.

В первом интеграле для достаточно малого ε мы можем воспользоваться оценкой $|f(t)| < Ct^a$ для некоторого $C > 0$, так что

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\varepsilon t^a e^{-\sigma t}dt,$$

где $\sigma = \operatorname{Re} x$. Увеличим в последнем интеграле интервал интегрирования до бесконечного

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\infty t^a e^{-\sigma t}dt = \frac{C}{\sigma^{a+1}}\int_0^\infty (\sigma t)^a e^{-\sigma t}d\sigma t = C\frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}}$$
$$= O\left(\frac{1}{\sigma^{a+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right),$$

если $x \to \infty$, оставаясь в секторе $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$.

Из леммы Ватсона следует, что если функция $f(t)$ такова, что $|f(t)| < e^{x_0 t}$ при больших t и $f(t) = a_1 t^{\alpha_1} + \cdots a_n t^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{n+1}})$ при $t \to 0$ и некоторых $a_1, ..., a_n$ и вещественных $\alpha_1, ...\alpha_{n+1}$, таких, что $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$, то

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = a_1\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{x^{\alpha_1+1}} + \cdots + a_n\frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}}\right).$$

Например, для функции $f(t)$, растущей на бесконечности не быстрее некоторой экспоненты и имеющей в нуле асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k, \qquad t \to 0,$$

ее преобразование Лапласа $F(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$ имеет асимптотическое разложение в описанном выше секторе

$$F(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!a_k}{x^{k+1}},\qquad x\to\infty.$$

Заметим, что все рассуждения и результаты остаются верными и для всякого конечного интеграла $\int_0^b f(t)e^{-xt}dt$ – бесконечный отрезок интегрирования, отделенный от нуля, каждый раз дает экспоненциально малый вклад.

Подобным же образом оцениваются интегралы вида

$$I(x)=\int_0^\infty g(t)e^{x\varphi(t)}dt,$$

где $\varphi(t)$ - монотонно убывающая от 0 к $-\infty$ вещественнозначная функция. А именно, сделаем в интеграле замену переменных $t=-\psi(\tau)$, где $t=\psi(\tau)$ – функция, обратная к $\tau=\varphi(t)$:

$$I(x)=\int_0^\infty g(\psi(\tau))e^{-x\tau}d(-\psi(\tau))=-\int_0^\infty g(\psi(\tau))\psi'(\tau)e^{-x\tau}d\tau.$$

Таким образом, задача сводится к оценке интеграла Лапласа $I(x)=-\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau$, где $f(\tau)=g(\psi(\tau))\frac{d\psi(\tau))}{d\tau}$. Если обе функции $g(t)$ и $\varphi(t)$ имеют асимптотические разложения в нуле,

$$\varphi(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kt^k,\qquad g(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k,\qquad t\to 0,$$

то и функция $f(\tau)$ имеет асимптотическое разложение в нуле $f(\tau)\sim\sum_{k=0}^\infty c_k\tau^k$, коэффициенты которого находятся реккурентно (для этого фактически требуется обращение первого ряда):

$$c_0=b_0a_1^{-1},\ c_1=b_1a_1^{-2}-2a_2b_0a_1^{-4},\ \ldots$$

и определяют коэффициенты асимптотического разложения интеграла $I(x)$. Как и раньше, те же оценки верны и для интеграла с конечным верхним пределом.

1.6. **Интегралы гауссова типа.** Пусть $f(t)$ - функция такая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt$ абсолютно сходится при больших x. Преобразование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt=\int_0^{+\infty}(f(t)+f(-t))e^{-xt^2}dt$$

и последующая замена переменных $t=\sqrt{\tau}$ также сводят этот интеграл к интегралу Лапласа

$$\int_0^{+\infty}(f(\sqrt{\tau})+f(-\sqrt{\tau}))e^{-x\tau}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

Таким образом, если функция $f(t)$ имеет в нуле асимптотическую оценку

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2n}a_kt^k+O(t^{2n+1}),$$

то подинтегральная функция в последнем интеграле оценивается как

$$\frac{\tau^{\frac12}}{2}(f(\tau^{\frac12})+f(-\tau^{\frac12}))=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}\tau^{k-\frac12}+O\left(\tau^{n+\frac12}\right),$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac12)}{x^{k+\frac12}}+O\left(\frac{1}{x^{k+\frac32}}\right)=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{(2k-1)!!}{2^kx^{k+\frac12}}+O\left(\frac{1}{x^{k+\frac32}}\right).$$

Как и раньше, эта же оценка верна для интеграла по любому интервалу, содержащему 0.

Задачи 28.01.2016

1. Получить полное асимптотическое разложение интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

при больших положительных x двумя способами: интегрированием по частям и сведением к интегралу Лапласа.

2. Найти асимптотическое разложение при больших положительных x интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{sh} t} dt$$

Занятие 5

1.7. **Метод перевала. Вещественная версия.** Метод перевала в простейшей версии описывает асимптотическое вычисление интеграла $I(x) = \int_a^b g(t) e^{x\varphi(t)} dt$, где $\varphi(t)$ имеет единственный максимум во внутренней точке $t_0 \in (a, b)$. Имеем

$$\int_a^b g(t) e^{x\varphi(t)} dt = \int_a^b g(t) e^{x\varphi(t_0) + x(\varphi(t) - \varphi(t_0))} dt = e^{x\varphi(t_0)} \int_a^b g(t) e^{x(\varphi(t) - \varphi(t_0))} dt.$$

Сделаем замену переменных $t = \psi(\tau)$, обращающую соотношение $\varphi(t) - \varphi(t_0) = -\tau^2$:

$$\int_a^b g(t) e^{x\varphi(t)} dt = \int_{\psi(\tau)=a}^{\psi(\tau)=b} f(\tau) e^{-x\tau^2} d\tau,$$

где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\psi'(\tau)$. Следовательно, интеграл $I(x)$ имеет асимптотическое разложение при $x \to +\infty$:

$$\int_a^b g(t) e^{x\varphi(t)} dt \sim e^{x\varphi(t_0)} \left(\sum_{k \geq 0}^{n} c_{2k} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right) \right),$$

где c_n - коэффициенты асимптотического разложения $f(\tau)$ в нуле, вычисляемые реккурентно по коэффициентам асимпотических разложений $g(t)$ и $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = t_0$. Для этого в первую очередь следует найти разложение функции $\psi(\tau) = d_0 + d_1\tau + \cdots + d_n\tau^n + o(\tau^n)$ в окрестности точки $\tau = 0$:

$$\frac{\varphi''(t_0)}{2}(\psi(\tau) - t_0)^2 + \frac{\varphi'''(t_0)}{2}(\psi(\tau) - t_0)^3 + \cdots = -\tau^2,$$

так что

$$\psi(\tau) = t_0 + \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(t_0)}}\tau + \frac{2\varphi'''(t_0)}{3\varphi''(t_0)^2}\tau^2 + \cdots .$$

В частности, $c_0 = g(\psi(0))\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{-\varphi''(t_0)}} g(t_0)$.

Можно также заметить, что все аргументы работают и для комплекснозначной функции $\varphi(t)$ с единственной критической точкой $t = t_0$ внутри интервала, в которой $\varphi'(t_0) = 0$ и действительная часть $\varphi(t_0)$ имеет локальный максимум (за исключением знака перед τ^2 в соотношении $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \tau^2$). В этом случае асимптотическое разложение имеет место при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$. Коэффициент $c_0 = g(\psi(0))\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(t_0)}} g(t_0)$.

1.8. **Формула Стирлинга.** Для исследования асимптотики $\Gamma(x)$ при больших положительных x чуть более удобно представить $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^x d\tau = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau + x\log\tau} d\tau.$$

Подинтегральная функция обращается в ноль на концах интервала интегрирования и имеет максимум в точке $\tau = x$, где $(-\tau + x\log\tau)' = -1 + x/\tau = 0$. Сдвинем точку макимума в 0 заменой переменных $\tau = (t+1)x$. Получим

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x-tx+x\log(t+1)x} x dt = x^x e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{x(-t+\log(t+1))} dt,$$

так что

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-1}^\infty e^{xp(t)} dt, \qquad p(t) = -t + \log(t+1)$$

где функция $p(t)$ имеет единственный экстремум с максимумом действительной части в точке 0. К этому интегралу применим метод перевала:

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x\tau^2}\psi'(\tau) d\tau,$$

где $t = \psi(\tau)$ есть решение уравнения $t - \log(t+1) = \tau^2$. Для нахождения асимтотического разложения этого интеграла необходимо найти асимптотическое разложение функции $t = \psi(\tau)$ в нуле. Пусть $t = \psi(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + ... + a_n\tau^n + O(\tau^{n+1})$. Найдем первые члены разложения:

$$t - \log(1+t) = t - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + O(t^4) = \frac{1}{2}(a_1\tau + a_2\tau^2 + O(\tau^3))^2 - \frac{1}{3}(a_1\tau + O(\tau^2))^3 = \tau,$$

откуда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Аналогично $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{18}$. Отсюда $\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \sqrt{2}6\tau^2 + O(\tau^3)$. Итак, при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \sum_{k=0}^n c_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $c_0 = \sqrt{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, т.е.,

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Общая формула коэффициентов асимптотического разложения $\Gamma(x)$ неизвестна.

2. Асимптотики интегралов Фурье

2.1. **Осциллирующие интегралы.** Мы рассматриваем теперь интегралы вида

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{ixt}\varphi(t).$$

Здесь, в отличие от интегралов Лапласа, другая причина убывания на бесконечности – осцилляции, т.е. условная сходимость. Основной здесь является следующая лемма.

Лемма Римана–Лебега. Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^b dt\, e^{ixt}\varphi(t),$$

где a и b конечны, или бесконечны. Пусть

а) $\varphi(t)$ кусочно непрерывная

б) в случае несобственного интеграла $F(x)$ сходится он равномерно по x (например $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема)
Тогда $F(x) = o(1)$ при $|x| \to \infty$, т.е. $\lim_{|x|\to\infty} F(x) = 0$.

Доказательство проведем для случая конечного интервала. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$ и для любого ϵ существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, такое что $|\varphi(t) - \varphi(t_m)| < \epsilon$ внутри каждого отрезка разбиения. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}[\varphi(t) - \varphi(t_{t_k})]}_{<(b-a)\epsilon} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) \frac{e^{ixt_k} - e^{-ixt_{k-1}}}{ix} + (b-a)\epsilon < \frac{Mn}{|x|} + (b-a)\epsilon,$$

так что оба члена могут быть сделаны сколь угодно малыми при больших $|x|$. ■

Замечание. Интеграл $\int_0^\infty dt\, t^{-\sigma} e^{itx}$, $-1 < \sigma < 0$, сходится по t не абсолютно, но равномерно по x при $|x| \to \infty$, так что лемма Римана–Лебега к нему применима.

Следствие 1. Пусть $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема n раз. Тогда

$$F(x) = e^{ibx}\left(\frac{\varphi(b)}{ix} - \frac{\varphi'(b)}{(ix)^2} + \frac{\varphi''(b)}{(ix)^3} - \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{(n-1)}(b)}{(ix)^n}\right) -$$
$$- e^{iax}\left(\frac{\varphi(a)}{ix} - \frac{\varphi'(a)}{(ix)^2} + \frac{\varphi''(a)}{(ix)^3} - \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(ix)^n}\right) + o(x^{-n})$$

Доказательство проводится интегрированием по частям.

$$F(x) = \int\limits_a^b dt\, e^{ixt}\varphi(t) = \left.\frac{e^{ixt}\varphi(t)}{ix}\right|_{t=a}^{b} - \int\limits_a^b dt\, e^{ixt}\frac{\varphi'(t)}{ix},$$

где последний член имеет порядок x^{-1} в силу леммы. И так далее.

Следствие 2. Пусть $a = 0$, $b = \infty$, $\varphi \in \mathscr{S}$ (впрочем, достаточно простого убывания вместе со всеми производными). Тогда

$$F(x) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{ixt}\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) \left(\frac{i}{x}\right)^{k+1}, \quad |x| \to \infty.$$

Сравним с интегралом Лапласа:

$$F(z) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{-zt}\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}$$

где $z \to \infty$ так, что $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. Подставляя $z = -ix = \dfrac{x}{i}$, видим, что асимптотическое разложение интеграла Фурье для быстроубывающих функций является аналитическим продолжением асимптотического разложения соответствующего интеграла Лапласа на область $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}$.

Пример.

$$\int\limits_0^\infty dt\,\frac{e^{itx}}{1+t} \sim (-1)^n n!\left(\frac{i}{x}\right)^{n+1}, \quad |x|\to\infty,$$

$$\int\limits_0^\infty dt\,\frac{e^{-tz}}{1+t} \sim (-1)^n n!\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2} \to \infty,$$

На самом деле асимптотическое разложение работает даже в области $|\arg z| < \pi - \delta$

Задачи 4.02.2016

1. Исследуйте асимптотику ($x\to\pm\infty$) преобразования Фурье финитной функции, заданной на своем носителе $[-a,a]$ формулой

$$y = e^{-\frac{1}{(x^2-a^2)^2}}.$$

2. Оцените интеграл

$$\int_0^1 e^x \frac{x^n}{(1+x^2)^n}dx$$

при больших натуральных n

3. Асимптотика интеграла Лапласа возможна и по нецелым степеням. Как обобщить это на интеграл Фурье?

Занятие 6

Для исследования асимптотики интеграла Лапласа функций, имеющих нецелочисленную асимптотику на краю области интегрирования необходимо знание интегралан

$$\int\limits_0^\infty dt\,t^\alpha e^{-pt} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1.$$

В аналогичной задаче для преобразования Фурье нужен интеграл

$$\int\limits_0^\infty dt\,t^\alpha e^{itx} = e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}, \qquad \text{где } -1<\alpha<0,$$

чтобы обеспечить сходимость и в нуле, и на бесконечности. Доказательство:

$$\int\limits_0^\infty dt\,t^\alpha e^{-tx} = \int\limits_0^{i\infty} dt\,t^\alpha e^{-tx} =$$

где мы воспользовались тем, что в первом квадранте вклад по четверти большого круга дает в пределе ноль. Таким образом во втором интеграле t – чисто мнимо и $0<t<i\infty$, точнее $0<it<\infty$. Тогда

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d(-it)}{-i}\,(-it)^\alpha e^{itx} = e^{-i\pi(\alpha+1)/2}\int\limits_0^\infty dt\,e^{ixt}t^\alpha.$$

Проблема в том, что мы умеем только интегрировать по частям осциллирующе интегралы, и не умеем отщеплять, как в интеграле Лапласа, стандартные интегралы - они расходятся на бесконечности. Выход в использовании интегрировании по частям с интегрально заданными функциями, благо от них потребуются только граничные значения.

Например, пусть $-1<\alpha<0$ и

$$F(x)=\int\limits_0^\infty dt\,\underbrace{t^\alpha e^{itx}}_{\psi'(t)}\varphi(t)=\psi(t)\varphi(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty dt\,\psi(t)\varphi'(t),$$

где мы обозначили

$$\psi(t)=\int\limits_\infty^t d\tau\,\tau^\alpha e^{ix\tau}.$$

Тогда

$$\psi(0)=-\int\limits_0^\infty d\tau\,\tau^\alpha e^{ix\tau}=-e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},$$

так что

$$\psi(t)\sim\frac{t^\alpha e^{itx}}{ix}\quad \text{при } t\to+\infty.$$

(оценка интеграла $\int_\infty^t d\tau\,\tau^\alpha e^{ix\tau}$ по частям). Следовательно,

$$F(x)\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)e^{i\pi(\alpha+1)/2}}{x^{\alpha+1}}-\int\limits_0^\infty dt\,\psi(t)\varphi'(t),$$

где $\psi(t)$ обладает указанной выше асимптотикой при $t\sim\infty$. Можно повторить вычисления, взяв $\psi^{(2)}(t)=\int_\infty^t d\tau\,\psi(\tau)$. Потребуется вычислить интеграл $\int_\infty^0 d\tau\,\psi^{(2)}$, что аналогично предыдущему дает $\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}}e^{i\pi(\alpha+2)/2}$. Итак,

$$\begin{aligned}F(x)&\sim e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}a_1+e^{i\pi(\alpha+2)/2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}}a_2+\ldots=\\&=\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+1}a_1+\Gamma(\alpha+2)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+2}a_2+\ldots,\quad t\to0,\end{aligned}$$

где асимптотически $\varphi(t)\sim a_1+a_2t+\ldots+a_{n+1}t^n$, $t\to0$. Отсюда получаем, что при наличии бесконечной дифференцируемости и равомерной сходимости интегралов от производных

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b dt\,e^{itx}\varphi(t)\sim e^{iax}&\left(a_1\Gamma(\alpha_1+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_1+1}+a_2\Gamma(\alpha_2+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_2+1}+\ldots\right)-\\&-\sim e^{ibx}\left(b_1\Gamma(\beta_1+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_1+1}+a_2\Gamma(\beta_2+1)\left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_2+1}+\ldots\right),\end{aligned}$$

если имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned}&\text{при } t\to a:\quad \varphi(t)\sim a_1(t-a)^{\alpha_1}+a_2(t-a)^{\alpha_2}+\ldots,\quad \alpha_1<\alpha_2<\ldots,\\&\text{при } t\to b:\quad \varphi(t)\sim b_1(t-b)^{\beta_1}+b_2(t-b)^{\beta_2}+\ldots,\quad \beta_1<\beta_2<\ldots.\end{aligned}$$

Для доказательства нужно разбить интеграл на два полубесконечных интеграла, сведя задачу к предыдущей, и вычесть разложения.

2.2. **Метод стационарной фазы.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x) = \int_a^b dt\, f(t) e^{ixp(t)},$$

где $p(t)$ гладкая вещественная функция, непрерывно дифференцируемая нужное число раз на отрезке $[a,b]$, причем имеющая на этом отрезке единственный экстремум в точке t_0 . Разобьем интервал на два отрезка монотонности функции $p(t)$ (пусть, для определенности, это точка минимума этой функции) и сделаем замену переменных:

$$F_1(x) = \int_{t_o}^b dt\, f(t) e^{ixp(t)} = e^{ixp(t_0)} \int_{t_0}^b dt\, f(t) e^{ix(p(t)-p(t_0))} =$$

(где мы рассмотрели часть отрезка: от t_0 до b. Положим: $u = p(t) - p(t_0)$)

$$= e^{ixp(t_0)} \int_0^{\beta = p(b) - p(t_0)} \frac{du}{p'(t(u))} f(t(u)) e^{ixu}.$$

Положим $\varphi(u(t)) = \dfrac{f(t)}{p'(t)}$ и рассмотрим поведение этой функции в конечных точках интервала. При $t \to t_0$ имеем: $u \sim \dfrac{p''(t_0)}{2}(t-t_0)^2$ и $p'(t) \sim p''(t_0)(t-t_0) = \sqrt{2up''(t_0)}$. Отсюда

$$\varphi(u(t)) \sim \frac{f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} u^{-1/2} \quad \text{при } u \to 0, \quad \text{т.е. при} \;\; t \to t_0,$$

$$\varphi(u(t)) \to \frac{f(b)}{p'(b)} \quad \text{при } u \to \beta, \quad \text{т.е. при} \;\; t \to b,$$

а тогда

$$F_1(x) = e^{ixp(t_0)} \frac{\Gamma(1/2) f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)} \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Аналогично вычисления проводятся и для левого интервала. Нечетные в точке t_0 слагаемые в сумме сокращаются, так что имеем окончательно

$$F(x) = e^{ixp(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) +$$
$$+ \left(e^{ixp(a)} \frac{f(a)}{p'(a)} - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)}\right) \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

В случае максимума имеем в главном члене

$$\sqrt{\frac{2\pi}{-2p''(t_0)}} \left(\frac{-i}{x}\right)^{1/2}.$$

Занятие 7

3. Формула Эйлера–Маклорена

Идея оценки интеграла Фурье – использование интегрирования по частям способом, противоположным естественному: мы заменяем интеграл, где подинтегральная функция содержит исходно исследуемую $f(t)$ на интеграл, содержащий $f'(t)$. Аналогичный прием используется для вычисления сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(f(k) - f(k+1)) + (n-1)f(n)$$

(преобразование Абеля). Эйлер использовал эти два приема одновременно.

Рассматривается следующая задача. Фиксируем целое число a и функцию вещественного переменного $f(x)$. Исследуем отличие суммы

$$S_n = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

от интеграла $\int_a^n f(x)dx$. Соответствующую разность можно представить интегралом

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n \omega_1(x) f'(x)dx, \qquad \text{где} \quad \omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

В самом деле, для всякого целого j имеем, интегрируя по частям,

$$\int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx = \frac{f(j) + f(j+1)}{2} - \int_j^{j+1} f(x)dx.$$

Суммируя это тождество по j, приходим к (3.1). Другой способ вывода - использование интеграла Стильтьеса. Имеем

$$\int_a^n f(x)d[x] = f(a+1) + \ldots + f(n), \qquad \int_a^n f(x)d[-x] = -f(a) - \ldots - f(n-1),$$

так что

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n f(x)d\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right).$$

Беря интеграл Стильтьеса по частям, получим

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = -\int_a^n f'(x)\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right)dx = -\int_a^n f'(x)\left([x] - x + \frac{1}{2}\right)dx$$

Продолжим, начиная с формулы (3.1), процесс интегрирования по частям. Заметим. что функция $\omega_1(x)$ периодична с периодом 1 и ее интеграл по периоду нулевой:

$$\omega_1(x) = \omega_1(x+1), \qquad \int_0^1 \omega_1(x)dx = 0, \qquad \text{и} \qquad \omega_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 0 \le x < 1.$$

Поэтому существует (теперь уже непрерывная) периодическая функция $\omega_2(x)$ с нулевым интегралом по периоду, такая. что $\omega_2'(x) = \omega_1(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

Интегрирование (3.1) по частям дает равенство

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \omega_2(x)f'(x)|_a^n - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \tag{3.2}$$

и, более общо,

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \sum_{s=2}^{m} \omega_s(x)f^{(s-1)}(x)|_a^n + (-1)^{m+1}\int_a^n \omega_m(x)f^{(m)}(x)dx \tag{3.3}$$

Это и есть формула Эйлера–Маклорена в простейшем варианте.

Периодические с периодом 1 функции $\omega_k(x)$ находятся рекуррентно из условий

$$\omega'_{k+1}(x) = \omega_k(x), \qquad \int_0^1 \omega_k(x)dx = 0.$$

Для более явного описания функций $\omega_k(x)$ соберем их в производящую функцию

$$G(x,t) = \sum_{k\geq 0} \omega_k(x)t^k, \qquad 0 \leq x < 1$$

положив $\omega_0(x) = 1$. Тогда условие $\omega'_{k+1}(x) = \omega_k(x)$ запишется в виде

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \sum \omega'_k(x)t^k = \sum \omega_{k-1}t^k = tG(x,t).$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = tG(x,t)$ легко решается:

$$G(x,t) = g(t)e^{tx},$$

где $g(t)$ - произвольная функция. Ее позволяет найти соотношение $\int_0^1 \omega_k(x)dx = \delta_{k,0}$, которое в терминах G имеет вид $\int_0^1 G(x,t)dx = 1$:

$$\int_0^1 g(t)e^{tx}dx = \frac{g(t)}{t}e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{g(t)\left(e^t - 1\right)}{t} = 1,$$

откуда $g(t) = \frac{t}{e^t-1}$ и $G(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$. В принятых сейчас обозначениях (раньше использовали также нормировку без факториалов) функция $G(x,t)$ есть производящая функция многочленов Бернулли $B_k(x)$

$$G(x,t) = \sum_{k\geq 0} B_k(x)\frac{t^k}{k!}, \qquad \text{так что} \qquad \omega_k(x) = \frac{B_k(x-[x])}{k!}.$$

Более употребительные числа Бернулли определяются как значения полиномов Бернулли в нуле, $B_k = B_k(0)$, так что $t/(e^t-1)$ является их производящей функцией:

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}t^n.$$

Полиномы Бернулли выражаются через числа Бернулли. В самом деле, из вида соответствующих производящих функций следует равенство формальных рядов по t: $e^{tx}\sum_k B_k t^k/k! = \sum_n B_n(x)t^n/n!$, т.е.,

$$\left(\sum_l \frac{(xt)^l}{l!}\right)\left(\sum_k B_k\frac{t^k}{k!}\right) = \sum_n B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

откуда

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n B_{n-j}x^j\binom{n}{j}.$$

Далее, производящая функция $G(x,t)$ инвариантна относительно замены $x \leftrightarrow 1-x$, $t \leftrightarrow -t$, поэтому $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, в частности, $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. Поскольку функции $\omega_k(x)$ периодичны и непрерывны при $n \geq 3$, заключаем, что $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$. Первые значения чисел Бернулли: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{12}$, $B_3 = 0$, $B_4 = \frac{1}{30}$. Теперь формулы (3.2) и (3.3) можно переписать следующим образом:

$$\text{(3.4)} \qquad \sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \frac{B_2(x-[x])}{2}f''(x)dx,$$

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \sum_{s=2}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!}\left(f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(a)\right) + R_m, \tag{3.5}$$

где остаток

$$R_m = -\int_a^n \frac{B_{2m+1}(x-[x])}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x)dx.$$

Здесь использовано равенство нулю нечетных чисел Бернулли с номером, большим единицы.

3.1. **Применения формулы Эйлера–Маклорена.** Прежде всего хотелось бы иметь хоть какую-нибудь оценку остаточного члена R_m, точнее, подинтегрального выражения $\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}$. Грубая оценка получается из изучения особенностей производящей функции $G(x,t)$. Эта функция имеет полюса по t в точках $t = 2\pi i k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это означает, что радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k\ge 0} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$ равен 2π, так что для любого r, $0 < r < 1$ выражение $\frac{B_k(x)}{k!}(2\pi r)^k$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, имеем оценку

$$\left|\frac{B_k(x)}{k!}\right| < C(r)\frac{1}{(2\pi r)^k}$$

для любого r, $0 < r < 1$.

Формулу Эйлера–Маклорена естественно применять для функций $f(x)$, производные $f^{(n)}(x)$ которых убывают с ростом n. Допустим, мы находимся ровно в такой ситуации и хотим оценить асимптотику суммы $\sum_a^n f(j)$ по параметру n. Тогда слагаемые $\dfrac{B_2 s}{(2s)!} f^{(2s-1)}(a)$ собираются в сумму, не зависящую от n. Имеется простой изящный прием, позволяющий избавиться от них сразу. Предположим, например, что уже $\int_a^{+\infty} f''(x)dx$ абсолютно сходится. Преобразуем формулу (3.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_a^n f(j) &= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^\infty \omega_2(x)f''(x)dx + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} + C + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx,
\end{aligned}$$

где

$$C = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12} - \int_a^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2} f''(x)dx. \tag{3.6}$$

Теперь будем описанным ранее методом интегрировать $\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx$ по частям:

$$\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx = \omega_3(n)f^{(3)}(n) - \int_n^\infty \omega_3(x)f^{(3)}(x)dx$$

и т.д. В результате получим формулу

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + C + \frac{f(n)}{2} + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m,$$

где C задано соотношением (3.6) и

$$R_m = \int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(x-[x])}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x)dx.$$

Задачи 25.02.2016

1. Выразить сумму

$$S_N(k) = 1^k + 2^k + \cdots N^k$$

через числа Бернулли.

2. Найти разложение и ряд Тейлора в нуле фкнкции $y = \operatorname{tg} x$.

Занятие 8

3.2. **Асимптотическая гармонического ряда и $n!$.** Поскольку

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

то по предыдущему имеем равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{dx}{x} + C + \frac{1}{2n} - \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!}\frac{(2s-1)!}{n^{2s}} + R_m = \log n + C + \frac{1}{2} - \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{2s}\frac{1}{n^{2s}} + R_m,$$

где C - неизвестная пока постоянная,

$$R_m = \int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(x-[x])(2m+1)!}{x^{2m+2}}dx.$$

В числителе интеграла, представляющего остаток, стоит периодическая, потому ограниченная функция, так что

$$|R_m| < C_1 \int_n^\infty \frac{dx}{x^{2m+2}} = C_2 \frac{1}{n^{2m+1}} = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Для нахождения постоянной C вычтем из обеих частей формулы Эйлера-Маклорена $\log n$ и перейдем к пределу $n \to \infty$. Получаем, что

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma,$$

где γ - постояная Эйлера. Таким образом, имеем асимптотическое разложение

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2} - \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{2s}\frac{1}{n^{2s}} + O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Вместо нахождения асимптотики $n!$ оценим рост его логарифма. Представим $\log n!$ в виде суммы $\log n! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n$ и применим предыдущие рассуждения для функции $f(x) = \log x$. Ее производные имеют вид $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. В частности, $\int_1^\infty f''(x)dx = -\int_1^\infty 1/x^2 dx$ сходится. Поэтому

$$\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= (x\log x - x)\Big|_1^n + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + R_m,$$

где

$$C = -\frac{1}{12} + \int_1^\infty \frac{B_{2s}(x-[x])}{(2x^2)}dx, \qquad R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m+1}(x-[x])}{(2m+1)x^{2m+1}}dx.$$

Интегрируя по частям, замечаем, что $R_m = O(1/n^{2m})$. Для постоянной C можно получить другое выражение, заметив, что в силу описанной выше формулы

$$C+1 = \lim_{n\to\infty}\left(\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n\right),$$

и, применив формулу Стирлинга для $n! = \Gamma(n+1)$,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+o(1)),$$

получим, что $C+1 = \frac{1}{2}\log 2\pi$, и в итоге полное асимптотическое разложение

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{s=1}^{m}\frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right).$$

3.3. **Ряд Стирлинга для** $\log\Gamma(z)$**.** . Подобным же образом можно получить полное асимптотическое разложение для логарифма Г-функции Эйлера. Воспользумся, к примеру, определением Эйлера:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Тогда

$$\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\big((\log 1+\dots\log n) - (\log z+\dots\log(z+n)) + z\log n\big). \tag{3.7}$$

Воспользуемся для каждой из сумм интегральным представлением (3.4):

$$\log 1+\ldots+\log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}(\log 1+\log n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-1\right) + \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx,$$

$$\log z+\ldots+\log(z+n) = \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}(\log z+\log(z+n)) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z}\right) + \int_0^n \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx.$$

Подставляя эти представления в (3.7), получим

$$\log\Gamma(z) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\log n\right)$$
$$+ C - \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx,$$

где $C = \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx$.

Вычислим вначале предел во второй строке последней формулы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\log n\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left((x\log x - x)\Big|_1^n - ((x+z)\log(x+z) - (x+z))\Big|_{x=0}^{x=n} - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z} - 1\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\log n - (n+z)\log(n+z) + z\log z - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\frac{n+z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\left(1+\frac{z}{n}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\frac{z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{12z}.$$

Оставшийся интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\omega_2(x)}{(x+z)^2}dx$$

оценим привычным способом интегрирования по частям с применением функций $\omega_k(x)$:

$$F(z) = -\sum_{s=2}^{m} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right),$$

так что

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C + \sum_{s=2}^{m} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right) \tag{3.8}$$

где $C = \frac{1}{2}\log 2\pi$, например, из того же сравнения с формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$.

Область параметра z, в которой работает асимптотическое разложение (3.8), определяется областью применимости асимптотической оценки интеграла

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx$$

при больших z. Для этого знаменатель $x+z$ должен быть равномерно отделен от нуля, т.е., асимптотическое разложение Стирлинга для $\log\Gamma(z)$ справедливо в области $|\arg z| < \pi - \delta$ для сколь угодно малого положительного δ.

Задачи 3.03.2016

1. Найдите асимптотику суммы

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Мы вывели полное асимптотическое разложение для логарифма Γ функции. Между тем полное асимптотическое разложение для самой Γ-функции неизвестно. Почему из одного разложения нельзя получить второе?