

Алгебра, семинар 8–12 января: собственные вектора

- а)** Докажите, что собственные значения вещественной симметричной матрицы размера 2×2 вещественные и неотрицательные.

б) Докажите, что вещественная матрица нечетного размера имеет вещественный собственный вектор, а четного – не обязательно.
- Найдите собственные числа и вектора матриц **а)** $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **с)** $\begin{pmatrix} -8 & -13 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, **д)** $\begin{pmatrix} 10 & 16 & 11 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, **е)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, **ф)** $\begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, **г)** $\begin{pmatrix} -6 & -14 & -7 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, **h)** $\begin{pmatrix} -4 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Возведите в пятую степень матрицы из пунктов **(а)** и **(с)** предыдущей задачи.
- Найдите собственные числа и вектора линейного оператора $F : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$, если F переводит многочлен $f(x)$ в **а)** $f'(x)$, **б)** $xf'(x)$, **с)** $(x+1)f'(x)$, **д)** $f(x+1)$, **е)** $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, **ф)** $f(x+1) - f(x)$, **г)** $\int f(x) dx$, **h)** $\frac{1}{x} \int f(x) dx$ (первообразная выбирается с корнем в нуле).
и)[×] Найдите все инвариантные пространства этих операторов.
- Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора F , действующего на комплексных матрицах размера 2×2 по формуле **а)** $F(X) = AX$, **б)** $F(X) = AX - XA$, **с)** $F(X) = AXA^{-1}$.