Задачи по группам и алгебрам Ли, семестр 2, листок 2. Универсальная обертывающая алгебра и ее центр.

Для получения оценки “10” по данному листку надо сдать 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Следующий листок будет выдан 15 февраля.

Говорят, что алгебра A имеет *возрастающую фильтрацию*, если $A = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} A_i$, где $A_i \subset A_{i+1}$ и $A_i{\cdot}A_j \subset A_{i+j}$ (иначе говоря, для каждого i определено пространство элементов алгебры, имеющих степень не выше i). В этом случае, *присоединенной градуированной алгеброй* называется $grA := \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} A_i/A_{i-1}$. Фильтрация на универсальной обертывающей алгебре вводится следующим образом: $U(\mathfrak{g})_k$ – это линейная оболочка всех выражений вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_l$, где $x_i \in \mathfrak{g}$ и $l \leq k$.

1. а) Докажите, что $grU(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. *Указание:* это утверждение теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. **б)** Докажите, что присоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себе однозначно продолжается до действия дифференцированиями на $S(\mathfrak{g})$ и на $U(\mathfrak{g})$, сохраняющими, соответственно, градуировку и фильтрацию.

Отображением симметризации $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ называется композиция естественного вложения $S(\mathfrak{g})$ в тензорную (свободную) алгебру $T(\mathfrak{g})$ с естественной проекцией $T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$.

2. а) Покажите, что отображение симметризации однозначно характеризуется свойством $\sigma(x^k) = x^k$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. **б)** Докажите, что отображение σ расщепляет фильтрацию, т.е. композиция $\sigma : S^i(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})_i$ с проекцией $gr : U(\mathfrak{g})_i \to S^i(\mathfrak{g})$ есть тождественное отображение $S^i(\mathfrak{g}) \to S^i(\mathfrak{g})$. **в)** Докажите, что отображение симметризации задает изомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей между $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$. **г)** Пусть $ZU(\mathfrak{g})$ – центр алгебры $U(\mathfrak{g})$. Докажите, что $ZU(\mathfrak{g}) = \sigma(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ и, в частности, $grZU(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (здесь $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ – подалгебра инвариантов действия $\mathfrak{g}$ на $S(\mathfrak{g})$).

3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. **а)** Докажите, что алгебра инвариантов $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ есть алгебра многочленов от некоторых образующих $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ степеней $1, \ldots, n$. *Указание:* Это инвариантные полиномиальные функции на пространстве матриц. Они однозначно определяются своими значениями на диагональных матрицах. **б)** Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{g})$ есть алгебра многочленов от образующих таких же степеней. **в)** Опишите центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

4*. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, покажите, что **а)** для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ центр алгебры $U(\mathfrak{g})$ есть алгебра многочленов от образующих степеней $2, 4, 6, \ldots, 2n$; **б)** для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ центр алгебры $U(\mathfrak{g})$ есть алгебра многочленов от образующих степеней $2, 4, 6, \ldots, 2n$; **в)** для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ центр алгебры $U(\mathfrak{g})$ есть алгебра многочленов от образующих степеней $2, 4, 6, \ldots, 2n{-}2, n$. *Указание:* во всех пунктах достаточно описать полиномиальные инварианты кососимметрических (относительноданной билинейной формы) матриц при действии группы, сохраняющей данную билинейную форму, сопряжениями. Во всех случаях следы нечетных степеней таковых матриц нулевые, а следы четных степеней являются нетривиальными инвариантными многочленами. В последнем случае есть еще пфаффиан.

В дальнейшем в этом листке $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Зафиксируем стандатный базис e_{ij} из матричных единиц в $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Определим подалгебры $\mathfrak{h}$ как линейную оболочку элементов e_{ii} (это абелева подалгебра, называемая *подалгеброй Картана*), $\mathfrak{n}_-$ – как линейную оболочку элементов e_{ij}, $i > j$, $\mathfrak{n}_+$ – как линейную оболочку элементов e_{ij}, $i < j$. Имеет место разложение в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

Элементы пространства $\mathfrak{h}^*$ называются *весами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вектор v в $\mathfrak{g}$-модуле V называется *особым вектором веса* λ, если $\mathfrak{n}_+v = 0$ и $xv = \lambda(x)v$ для любого $x \in \mathfrak{h}$. *Модулем*

Верма со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется $\mathfrak{g}$-модуль $M_\lambda := U(\mathfrak{g})/J_\lambda$, где J_λ – левый идеал, порожденный $\mathfrak{n}_+$ и $x - \lambda(x)$ для всех $x \in \mathfrak{h}$.

5. а) Докажите, что модуль Верма M_λ обладает (и однозначно определяется) следующим универсальным свойством: для любого модуля V и особого вектора $v \in V$ веса λ существует единственный гомоморфизм $\varphi : M_\lambda \to V$ такой, что $\varphi(v_\lambda) = v$. **б)** Докажите, что в модуле Верма все элементы $\mathfrak{h}$ действуют полупросто, а все элементы $\mathfrak{n}_+$ – локально нильпотентно. **в)** Найдите все веса (т.е. совместные собственные значения элементов $\mathfrak{h}$), встречающиеся в модуле Верма M_λ.

6. а) Докажите, что всякий центральный элемент алгебры $U(\mathfrak{g})$ на модуле Верма M_λ действует скаляром. **б)** Докажите, что этот скаляр полиномиально зависит от λ. **в)** Найдите этот скаляр для оператора Казимира, т.е. для центрального элемента $C := \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}e_{ji}$.

7. а) Докажите, что если $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то в модуле Верма M_λ имеется особый вектор веса $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1} - 1, \lambda_i + 1, \ldots, \lambda_n)$. *Указание:* из задачи 5б следует, что весовое пространство веса λ' в модуле M_λ аннулируется всеми $e_{kl} \in \mathfrak{n}_+$, где $(k,l) \neq (i, i+1)$. Для того, чтобы доказать, что это подпространство аннулируется $e_{i,i+1}$, воспользуйтесь алгеброй $\mathfrak{sl}_2$, образованной $e = e_{i,i+1}$, $h = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}$, $f = e_{i+1,i}$. **б)** Докажите, что собственное значение любого центрального элемента алгебры $U(\mathfrak{g})$ на модуле Верма M_λ инвариантно относительно замен $\lambda \mapsto \lambda'$ из пункта (а) *для любого* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Симметрическая группа S_n действует на $\mathfrak{h}^*$ переставляя координаты. Определим *сдвинутое действие* симметрической группы на $\mathfrak{h}^*$ следующим образом: для $\sigma \in S_n$ положим $\sigma \cdot \lambda := \sigma(\lambda + \rho) - \rho$, где $\rho := (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} - 1, \ldots, -\frac{n-1}{2})$.

8. а) Докажите, что сдвинутое действие симметрической группы порождается преобразованиями из предыдущей задачи. **б)** Докажите, что взятие собственного значения центрального элемента на модуле Верма задает изоморфизм центра универсальной обертывающей алгебры на алгебру $S(\mathfrak{h})^{S_n}$ полиномиальных функций на $\mathfrak{h}^*$, инвариантных относительно сдвинутого действия симметрической группы. Этот изоморфизм называется *гомоморфизмом Хариш-Чандры*. **в)** Докажите, что при общих значениях $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ модуль M_λ неприводим. *Указание:* в подмодуле должен быть особый вектор, на котором центральные элементы алгебры $U(\mathfrak{g})$ действуют с теми же собственными значениями, что и на старшем векторе.