

Листок 12. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, МОДУЛЬ 4, 25.03.2016

12◊1 Докажите сходимость несобственных интегралов и вычислите их:

$$\text{а) } \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

12◊2 Исследуйте несобственные интегралы на сходимость и абсолютную сходимость:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{(x - \sin x)^p}, \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p}, \quad \text{в) } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^p + x^q}, \quad \text{г) } \int_0^{+\infty} x^p \cos(x^3) dx, \quad (p, q \in \mathbb{R});$$

12◊3 Вытекает ли из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} f^3(x) dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} dx?$$

12◊4 Докажите, что интегралы $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ и $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$ сходятся и вычислите их.

12◊5 Пусть функция $f(x) \geq 0$ монотонная и пусть интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 0$.

12◊6 Пусть функция f удовлетворяет глобальному условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, $x, y \in [0, \infty)$ и пусть интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

12◊7 Пусть функция $f \in C[0, \infty)$ неотрицательна и удовлетворяет при некоторых $a > 0$ и $q \in (0, 1)$ условию $f(x+a) < qf(x)$ при всех $x \geq 0$. Докажите, что интеграл $\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx$ сходится при любом натуральном n .

12◊8 Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$, $a, b > 0$, где $f \in C[0, \infty)$ удовлетворяет одному из условий:

- (i) интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится;
- (ii) при некотором $T > 0$ для всех $x \geq 0$ справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$;
- (iii) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

12◊9 Докажите сходимость интеграла $\int_{\pi}^{+\infty} |\sin x|^{x^2} dx$.

12◊10* Пусть непрерывная функция $f(x) \geq 0$ монотонна и пусть интеграл на бесконечности от неё сходится. Докажите, что $\lim_{h \rightarrow +0} h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

12◊11* Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x^3 - x} dx$, где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x .