Инвариантные ансамбли.

Вигнер предположил, что гамильтониан ядра можно смоделировать большой случайной матрицей, симметрии которой совместны с симметриями рассматриваемой физ. системы. А именно, состояние квантовой системы задаётся вектором в гильбертовом пространстве, а наблюдаемые величины самосопряжёнными операторами. Энергия представляется оператором Гамильтона, собственные значения которого и есть измеряемые уровни энергии, на которых может находиться система. Можно думать о гамильтониане большой системы, как о большой эрмитовой матрице. Такая матрица в принципе может быть блок-диагональной; каждый блок соответствует своему набору квантовых чисел, и определяет инвариантное подпространство. При переходе к случайным матрицам предполагается, что уровни соответствующие разным блокам полностью некоррелированы, тогда как внутри каждого блока ведут себя как собств. значения случайных матриц. Чтобы понять какими свойствами должны обладать случайные матрицы, обратимся к понятию симметрии.

Состояния физ. системы задаются нормированными векторами в гильбертовом пространстве (умноженными на произвольный фазовый множитель).

Физически измеримые величины:

Матожидание наблюдаемых: $\mathbb{E}(A) = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle$.

Вероятности переходов: $P(\varphi \to \psi) = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2$.

Симметрии - преобразования пространства, времени или внутр. степеней свободы, которые не меняют физику, т.е. вероятностей перехода. Преобразования симметрий можно реализовать как действие операторов на Гильбертовом пространстве.

Теорема. (Вигнер) Любое преобразование симметрии представляется в виде либо унитарного либо антиунитарного оператора.

Опр.

Антиунитарный оператор A: $\forall \varphi, \psi$ 1. $|\langle A\varphi|A\psi\rangle| = |\langle\varphi|\psi\rangle|$

2. $A(\alpha|\varphi\rangle + \beta|\psi\rangle) = \alpha^*|A\varphi\rangle + \beta^*|A\psi\rangle$.

Антиунитарный оператор A представим в виде

$$A = KC,$$

где K - некоторый унитарный оператор, а C - оператор комплексного сопряжения.

Таким образом существование непрерывной группы симметрий предполагает инвариантность квантовой системы относительно некоторой унитарной группы. Поскольку мы хотим представить гамильтониан в виде случайной матрицы, потребуем, чтобы мера на матрицах была инвариантна относительно данной группы.

Конкретный же группа симметрии меры и вид случайных матриц определяется наличием или отсутствием в системе симметрии по отношению к обращению времени.

Опр.: T - оператор обращения времени, т.ч. $\forall|\varphi_0\rangle$

$$|\varphi_t\rangle = e^{-iHt}|\varphi_0\rangle \qquad |T\varphi_0\rangle = \alpha e^{-iHt}|T\varphi_t\rangle \qquad |\alpha| = 1$$

Опр. Дуальный оператор $A^R = TAT^{-1}$ $\quad T^2 = 1$

Самодуальный оператор: $A^R = A$

Пусть гамильтониан самодуален: $H = T^{-1}HT$

Ур-е Шредингера: $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$.

За малое время δt

$$|\psi_t\rangle = \left(1 - i\frac{H}{\hbar}\delta t\right)|\psi_0\rangle$$

$$T|\psi_0\rangle = \left(1 - i\frac{H}{\hbar}\delta t\right)T|\psi_t\rangle \Rightarrow |\psi_t\rangle = \left(1 + \frac{T^{-1}iHT\,\delta t}{\hbar}\right)|\psi_0\rangle$$

т.к. $T^{-1}HT = H \Rightarrow T^{-1}iT = -i \Rightarrow T$ - антиунитарный оператор.

Потребуем, чтобы случайные матрицы были самодуальны. Какие ограничение это накладывает?

T представим в виде $T = KC$, где K – фиксир. унитарный оператор, а C – компл. сопряжение.

Каков выбор K?

При унитарных преобр: $KC = T \to UTU^+ = UKCU^+ = UKU^TC$

$K \to UKU^T$

$CU^+ = U^TC$

$C^2 = 1$

$T^2 = \gamma 1 \quad |\gamma| = 1$

$KCKC = KK^*CC = KK^* = \gamma$, напомним K -унитарно

$KK^+ = 1 \Rightarrow CKCCK^+C = K^*K^T = 1 \Rightarrow K = KK^*K^T = \gamma K^T = \gamma^2 (K^T)^T = \gamma^2 K$

$\gamma^2 = \pm 1$

1) $\gamma = +1 \quad K = K^T$ – симметр. унитарная матрица.

Любую симметр. унитарную матрицу можно предст. в виде $K = VV^T$, где V - унитарная матрица

$\left(K = e^{iH} = e^{iH^T} = K^T \Rightarrow H = H^T \right)$

Преобразованием $V^{-1}K(V^T)^{-1} = V^+KV^* = I$ можно сделать матрицу K единичной: $T = C$

Таким образом в данном базисе $H = CHC \Rightarrow$

$\Rightarrow H$ - действительные симметрические матрицы.
Мы хотим представлять гамильтониан, как выборку из множества. Поскольку физическая картина не зависит от выбора базиса, будем выбирать такой базис, где $K = 1$, а

$H = H^T$ - действ матрица. Такие гамильтонианы связаны между собой ортогональными преобраз.:

$H' = OHO^T \qquad O \in SO(N) \qquad \boxed{OKO^T = K = I_N}$

Опр. Ортогональный гауссовский ансамбль.

Ансамбль вещественных симметрических матриц $X \in \mathbb{R}^{N\times N}$ таких что матричные элементы на диаг. и выше независимы и $X_{ii} = \mathcal{N}$, $X_{ij} = X_{ji} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{N}$, $i>j$.

(можно представить $X = \frac{1}{2}(Y + Y^T)$, $Y_{ij} = \mathcal{N}$ - i.i.d), т. е.

$$\boxed{\mu(dx) = \frac{1}{Z}\prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{x_{ii}^2}{2}} dx_{ii} \prod_{1\le i<j\le N} e^{-x_{ij}^2} dx_{ij}}$$

Замечание. Мера инвариантна относительно орт. преобраз.:

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, X^2} dX$$

$$Y = O^T X O \qquad \mu(dx) = \mu(dy)$$

2) $\gamma = -1$ $\qquad K = -K^T$ кососимметричные унитарные матрицы. Любой кососимметричный унитарный оператор можно привести к канонической форме:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad Z^{-1} = -Z$$

Чтоб K был не вырожденным все матрицы должны иметь чётное число строк и столбцов.
Тогда условие самодуальности запишется в виде:

$$H = ZCHCZ^{-1} = ZH^TZ^{-1} = -ZH^TZ$$

Дальнейшие преобразования должны сохранять Z:

$$Z = B Z B^T$$

$$B^+ = -Z B^T Z = B^R$$ такие матрицы образуют

N-мерную симплектическую группу:

Удобно думать о матрицах в терминах кватернионов: $1, e_1, e_2, e_3$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \qquad e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k.$$

Можно сопоставить кватернионам матрицы: $e_i = i\sigma_i$

Тогда эрмитовы самодуальные матрицы, а так же унитарные матрицы B, удовл. $B^R = B^+ = B^{-1}$ это кватернионно вещественные матрицы; т. е. матрицы с матр. элементами $q = q^0 + q^{(1)} e_1 + \dots + q^{(3)} e_3$ и эрмитовые матрицы имеют вид:

$$H = H^0 \otimes \mathbb{1}_2 + H^{(1)} \otimes e_1 + H^{(2)} \otimes e_2 + H^{(3)} \otimes e_3,$$

где H^0 - симметричная, а $H^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ - кососимметричные действительные матрицы.

Потребуем теперь, чтобы наши случайные матрицы, будучи эрмитовыми и кватернионно действительными, были распределены наиболее случайным образом относительно меры инвариантной относительно симплект. преобразований.

<u>Опр.:</u> Гауссов Симплект. Ансамбль (GSE)

Ансамбль эрмитовых кватернионно действительных матриц где кватернионные матричные элементы независимые, нормально распределенные сл. в.:

$$q_{ii}^{(0)} \sim N[0, 1/2] \qquad q_{ij}^{(i)} \sim N\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \qquad i > j$$

Пусть Y - кв. дейст., $y_{ik}^{(i)} \sim N(0, \frac{1}{2})$, тогда $X = \frac{1}{2}(Y + Y^+)$

Плотность вероятности:

$$\mu(dX) = e^{-2\sum_{i=1}^{N}(q_{ii}^{(0)})^2 - 4\sum_{\substack{i<j\\ k=1}}^{3}(q_{ij}^{(k)})^2} \prod_i dq_{ii} \prod_{k=1}^{3}\prod_{i<j} dq_{ij}^{(k)}$$

$$e^{-2\,\mathrm{Tr}\,X^2}$$

<u>Утв.</u> (Д.3.) Спектр эрмитовой кватернионно-действ. матрицы двояко вырожден.

При отсутствии антиунитарной симметрии, матрица предполагается произвольной эрмитовой, а группа сопрягающая эрмитовы матриц — $U(N)$

<u>Опр.</u> Гауссов унитарный ансамбль. GUE ($\beta=2$)

$X = X^{+}$; x_{ij} — незав. сл. величины при $i \le j$

$x_{ii} \sim N(0, 1/\sqrt{2})$ $\quad x_{ij} = \mathrm{Re}\, x_{ij} + i\, \mathrm{Im}\, x_{ij}$ $\quad \mathrm{Re}\, x_{ij}, \mathrm{Im}\, x_{ij} \sim N(0, \frac{1}{2})$

Мера:

$$\mu(dX) = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i x_{ii}^2} e^{-2\sum_{i<j}|x_{ij}|^2} \prod_i dx_{ii} \prod_{k<j} d\mathrm{Im}\, x_{ij}\, d\mathrm{Re}\, x_{ij}$$

$$= \frac{1}{Z} e^{-\mathrm{Tr}\, X^2} dX$$

Распределение собств значений.

<u>Теорема.</u>

Распределение плотности собств значений β-ансамблей:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = |\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)|^{\beta} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_i \lambda_i^2}, \text{ где}$$

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j) = \det(\lambda_i^{N-j})$$

Док-во: (для $\beta = 1$)

У вещественной симметр матрицы $X \in \mathbb{R}^{N\times N}$ $\frac{N(N+1)}{2}$ степеней свободы. Из них N собств значений и $\frac{N(N-1)}{2}$ параметров собств векторов из которых можно построить матрицу $O(p_1, \dots, p_{\frac{N(N-1)}{2}})$:

$$X = O^T \Lambda O \qquad \text{где} \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

Поскольку плотность зависит только от λ:

$$P(X) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X^2)} = e^{-\frac{1}{2}\sum \lambda_i^2},$$

достаточно перейти к переменным Λ, p вычислив якобиан перехода:

$$J = \left| \frac{\partial X_{ij}}{\partial(\lambda, p)} \right|$$

Орт. преобр:

$$X = O^T \Lambda O \qquad \delta X = \overset{\overset{O^T O}{\vee}}{\delta O^T} \Lambda O + O^T \delta\Lambda O + O^T \Lambda \overset{\overset{O O^T}{\vee}}{\delta O} \ominus$$

$$O^T O = 1 \qquad \delta(O^T O) = 0 = \delta O^T \cdot O + O^T \cdot \delta O$$

$$\ominus\ \delta O^T \Lambda O + O^T \delta\Lambda O - O^T \Lambda O \delta O^T O$$

$$= O^T \left(O \delta O^T \Lambda - \Lambda O \delta O^T + O^T \delta \Lambda O \right) O =$$

$$= O^T \delta\tilde{X} O \qquad \delta\tilde{X} = \delta\Lambda + [\underbrace{O\delta O^T}_{\delta\Omega}, \Lambda]$$

$$\delta X \xrightarrow[J=1]{O} \delta\tilde{X} \xrightarrow[J=?]{} (\delta\Lambda, p) \qquad \Lambda_{ij} = \delta_{ij}\lambda_j$$

$$\delta\tilde{X}_{ij} = \delta_{ij}\delta\lambda_i + \delta\Omega_{jk}\delta_{kj}\lambda_j - \delta_{ik}\lambda_k \delta\Omega_{kj}$$

Новые переменные $\delta\lambda_i$, $\delta\Omega_{ik}$:

$$J = \frac{\partial \delta\tilde{X}_{ij}}{\partial(\delta\lambda_i, \delta\Omega_{jk})} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1, & & \\ & & & \lambda_1 - \lambda_2, & \\ & & & & \ddots, \lambda_i - \lambda_j, \dots \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

$$\mu(dX) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i^2} |\Delta_N(\lambda_1 \ldots \lambda_N)| d\lambda_1 \ldots d\lambda_N \, d\Omega$$

Интегрируя по $d\Omega$ получим утв. теоремы.

В док-ве использовалась инвариантность меры Лебега на симметрических матрицах по отношению к ортогональным преобразованиям. Это утверждение будет использоваться далее. Докажем его

Предложение: Пусть $X = X^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $Y = OXO^T$, $O \in SO(N)$

$dX := \prod_i dX_{ii} \prod_{i<j} dX_{ij}$. Тогда $\det\left|\frac{\partial Y_{ij}}{\partial X_{kj}}\right| = \pm 1$, т.е.

Док-во:

Заметим, что ортогональное преобраз. сохраняет следы степеней: $\mathrm{Tr}\, X^2 = \mathrm{Tr}\, Y^2$

Запишем независимые компоненты матриц в виде векторов из $N(N+1)/2$ компонент

$(X_{11}, \ldots, X_{NN}, X_{12}, \ldots, X_{1N}, \ldots)$ $\quad Y = \ldots$

Условие сохр следа $\sum_{ii} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_{ij}^2 = \sum_{ii} Y_i^2 + 2\sum_{i<j} Y_{ij}^2$

Это можно в векторах это можно записать в виде:

$$\langle X, DX\rangle = \langle Y, DY\rangle,$$

где матрица $D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n(n-1)/2})$

При этом $Y_{ij} = O_{il} X_{lk} O^T_{kj} = X_{lk} O_{il} O_{jk}$, или в векторах $Y = LX$, где $L_{(ij)(lk)} = O_{il} O_{jk}$

Получим для $\forall X$ $\langle X, DX\rangle = \langle LX, DLX\rangle$.

Предложение. Пусть D и $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $D = diag(d_1, \dots, d_m)$ $d \neq 0$, и для $\forall v \in \mathbb{R}^m$

$$\langle Lv, DLv\rangle = \langle v, Dv\rangle.$$

Тогда $\det L = \pm 1$

Док-во: $L^T D L = D \Rightarrow (\det L)^2 = 1$ $\square$

Круговые ансамбли:

Цель: вместо эрмитовых (симметрических, кватернионно вещественных самодуальных) рассмотреть унитарные матрицы: $H \to e^{itH}$.

<u>Опр.</u> Круговой ортогональный, COE, $\beta=1$ (унитарный, CUE, $\beta=2$; симплектический, CSE, $\beta=4$) ансамбль – это пространство унитарных симметричных (произвольных; самодуальных кватернионных) матриц, снабженное мерой инвариантной относительно присоединенного действия ортогональной (унитарной; симплектической группой).

1) Ортогональный: Пусть $S = S^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ – симметрическая унитарная матрица. Для каждой симметр. унитарной S найдется унитарная матрица U, $UU^* = 1$, т.ч. $S = U^T U$.

Определим окрестность $S + dS = U^T(1 + i\,dM)U$, где dM – вещ. симметрические матрица. Определим элемент объема:

$$\mu(dS) = \prod_i dM_{ii} \prod_{k<j} dM_{kj}.$$

Матрица U – не единственна, однако μ – не зависит от её выбора.

Предложение: Пусть $S = UU^T = VV^T$ и пусть $\mu(dS)$ построено по U, а $\mu'(dS)$ по V.

Тогда $\mu = \mu'$.

Док-во: $\mu(dS) = \left|\frac{\partial dM}{\partial dM'}\right| \mu'(dS)$

$dS = U^T dM U = V^T dM' V$ $\qquad dM = R^{-1} dM' R$, $R = VU^{-1}$

$RR^T = VU^{-1}(U^{-1})^T V^T = V(U^T U)^{-1} V^T = V(V^T V)^{-1} V^T = \mathbb{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow R \in SO(N) = \left|\frac{\partial dM}{\partial dM'}\right| = 1$ по теор. о инвариантности меры Лебега.

Доказать то же самое для CUE и CSE.

Положим меру на матрицах $\mathbb{P}(dS) = \frac{\mu(dS)}{V}$, где $V = \int \mu(dS)$.

Совместная плотность распределения:

Для любой унитарной симметрич. матрицы S

$\exists\, O \in SO(N) : O S O^T = \Lambda = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}),\ \theta_i \in [0, 2\pi)$

Задача найти плотность относительно меры Лебега:

$\mu(d\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{i=1}^N d\theta_i$.

Мы хотим перейти от $\mu(dS) = \mu(dM) = \prod dM_{ii} \prod_{i<j} dM_{ij}$

к $\mu(d\Lambda)\mu(dO)$.

Пусть $S = O^T \Lambda O = U^T U$ $\qquad d(OO^T) = dO \cdot O^T + O \cdot dO^T = 0$

$dS = iU^T dM U = dO^T \Lambda O + O^T d\Lambda O + O^T \Lambda dO$

$i O U^T dM U O^T = O\, dO^T \Lambda + \Lambda\, dO \cdot O^T + d\theta\, \Lambda\, i =$

$= [O, dO^T, \Lambda] + d\theta \cdot \Lambda \cdot i$

Выберем U так, что $OU^T = \sqrt{\Lambda}^{-1}$

$$OdO^T = d\Omega$$
$$d\Omega_{ij} = d\Omega_{jk}$$

$$i\sqrt{\Lambda}^{-1} dM \sqrt{\Lambda} = [OdO^T, \Lambda] + d\theta \cdot \Lambda \cdot i$$

$$dM = -i\left(\Lambda^{-1/2} OdO^T \Lambda^{1/2} - \Lambda^{1/2} OdO^T \Lambda^{-1/2}\right) + d\theta$$

$$dM_{ij} = \frac{1}{i}\left(\delta_{ik} e^{-\frac{i\theta_k}{2}} d\Omega_{ke} \delta_{ej} e^{\frac{i\theta_j}{2}} - \delta_{ik} e^{\frac{i\theta_k}{2}} d\Omega_{ke} \delta_{ej} e^{-\frac{i\theta_j}{2}}\right) +$$
$$+ d\theta_i \delta_{ij} = \frac{1}{i} d\Omega_{ij}\left(e^{i\frac{\theta_j - \theta_k}{2}} - e^{\frac{i(\theta_k - \theta_j)}{2}}\right) + d\theta_i \delta_{ij}$$
$$= 2\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) d\Omega_{ij} + d\theta_i \delta_{ij}$$

$$J = \frac{\partial M_{ij}}{\partial \Omega_{ke}} = \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) d\Omega_{ij} & ij = ke, \ i \neq j \\ d\theta_i & i = j = k = e \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu(dS) = |J| \, d\Omega \, d\theta = \prod_{i<j} \left|2\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right)\right| \prod_i d\theta_i \prod_{i<j} d\Omega_{ij}$$

$$= \prod_{i<j} \left|e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}\right| \prod d\theta_i \prod d\Omega_{ij}$$

Теорема:

Плотность собств. значений в круговых β-ансамблях

$$P_\beta(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{Z_\beta} \prod_{i<j} \left|e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}\right|^\beta$$

Ансамбль Уишарта.

Пусть X — вещественная (комплексная; кватерн. вещественная) матрица $n \times m$, $n < m$, с независимыми нормально распред. элементами с дисперсией независимых вещественных компонент $1/\beta$ и $A = X^+ X$.

Тогда $$\mathbb{P}(dA) = \frac{1}{C_{\beta n}} e^{-\frac{\beta}{2} \operatorname{Tr}(A)} (\det A)^{\frac{\beta}{2}(m-n+1) - 1} dA$$

После перехода к собственным значениям X имеем:

$$f(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i} \prod_i \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(m-n+1)-1} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$