Теория функций комплексного переменного – 2016
Листок 5

срок сдачи 13.05.2016

1. Докажите, что прямоугольник нельзя конформно перевести в квадрат так, чтобы все вершины перешли в вершины.

2. Пусть f – функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость переменной z на внутренность n-угольника с внутренними углами в вершинах $\pi\alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots n,\ 0 < \alpha_k \leq 2)$.

а) Докажите, что функция $g(z) = f''(z)/f'(z)$ аналитически продолжается до регулярной функции на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_k \in \mathbb{R}$ – прообразы вершин многоугольника.

б) Докажите, что $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$.

в) Как изменятся предыдущие утверждения, если f – функция, конформно отображающая внутренность единичного круга на внутренность того же многоугольника?

3. Пусть f – функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость переменной z на внутренность кругового n-угольника (т.е. n-угольника, стороны которого – дуги окружностей) с внутренними углами в вершинах $\pi\alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots n,$ $0 < \alpha_k \leq 2)$.

а) Докажите, что функция

$$g(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \sqrt{f'(z)}\left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}}\right)'' \qquad \text{(шварциан } S(f;z)\text{)}$$

аналитически продолжается до регулярной функции на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_k \in \mathbb{R}$ – прообразы вершин многоугольника.

б)* Докажите, что $g(z) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1 - \alpha_k^2}{(z - a_k)^2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{z - a_k}$, где c_k – некоторые коэффициенты (они называются акцессорными параметрами).

4. Гамма-функция $\Gamma(z)$ определяется при $\operatorname{Re} z > 0$ формулой $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$.

а) Докажите основное свойство гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ и вычислите $\Gamma(n)$ при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

б) Докажите, что функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена до голоморфной функции на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$, имеющей в каждой точке $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ простой полюс с вычетом $(-1)^n/n!$.

в) Докажите, что функцию $1/\Gamma(z)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\Big(1 + \frac{z}{k}\Big) e^{-z/k} \right],$$

где $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\Big) = 0,5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

г) Докажите тождество

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,.$$

Найдите $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ при произвольном $n \in \mathbb{Z}$.

5. Дзета-функция Римана комплексной переменной s при $\operatorname{Re} s > 1$ определяется рядом $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

а) Докажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx.$$

б) Докажите, что функция $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, имеющей в точке $s = 1$ простой полюс с вычетом 1.

в) Докажите, что дзета-функция Римана удовлетворяет функциональному соотношению

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\,\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\,\zeta(1-s)$$

г) Найдите $\zeta(-2k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, а также $\zeta(-1)$, $\zeta(0)$, $\zeta(2)$.

д) Докажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$ функцию $\zeta(s)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

по всем простым числам $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.