Дискретная математика и приложения
Листок 1

ВШЭ, факультет математики, первый курс

1. Докажите, что если степень каждой из n вершин простого графа (без петель и кратных рёбер) больше $\frac{n}{2}-1$, то граф связен.

2. Рассмотрим ряд $B(t) = t - \sum_{i\geq 2} \frac{b_i}{i!} t^i$. Пусть $A(s) = s + \sum_{k\geq 2} \frac{a_k}{k!} s^k$ – обратный ряд к $B(s)$, т.е. $(B(A(s)) = s)$. Докажите, что

$$a_k = \sum_{k_2,k_3,\dots} A_{k;k_2,k_3,\dots} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \dots .$$

Докажите, что $A_{k;k_2,k_3,\dots} \neq 0$, только если $\sum_{i>1}(i-1)k_i = k-1$.

3. Докажите, что если $\sum_{i>1}(i-1)k_i = k-1$, то

$$A_{k;k_2,k_3,\dots} = \frac{(\sum_{i>1} ik_i)!}{\prod_{i>1}(i!)^{k_i}(k_i)!}.$$

4. Коэффициент $A_{k;k_2,k_3,\dots}$ равен числу попарно неизоморфных корневых деревьев с помеченными листьями, таких что: а) корень имеет валентность больше 1; б) имеется ровно k вершин валентности 1, которые дополнительно помечены числами от 1 до k; в) имеется k_2 вершин с 2 потомками, k_3 вершин с тремя потомками и т.д.

5. Дан простой граф, степень любой вершины которого не меньше k, $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе найдется несамопересекающийся цикл длины не меньшей, чем $k+1$.

6. Найдите рекуррентное соотношение и производящую функцию для чисел Моцкина m_n (m_n – число непрерывных ломанных в верхней полуплоскости, составленных из векторов $(1,1)$, $(1,-1)$ и $(1,0)$, начинающихся в начале координат и заканчивающихся в точке $(n,0)$).

7. В дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины чётная и положительная.

8. Для простого графа G обозначим через $h_1(G)$ число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины чётна. (Пустой подграф удовлетворяет этому условию.) Докажите, что $h_1(G)$ – степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через количества n вершин, e рёбер и k компонент связности графа.

9. На рёбрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех рёбрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любой расстановки можно получить любую другую.

10. Для простого графа G обозначим через $h^1(G)$ наибольшее количество расстановок знаков $+$ и $-$ на его рёбрах, ни одну из которых нельзя получить из другого описанными в задаче 9 операциями. Докажите, что $h^1(G)$ – степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через n, e и k.