Дискретная математика и приложения
Семинар 1

ВШЭ, факультет математики
первый курс

Все рассматриваемые графы не имеют петель и кратных рёбер.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер. *Путем* в графе называется последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (цикл) называется *несамопересекающимся*, если он проходит по каждой своей вершине только один раз и никакое ребро не проходится два раза подряд. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов.

1. Выпуклый многоугольник (отличный от треугольника) разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Обязательно ли найдутся хотя бы два треугольника разбиения, примыкающие к сторонам многоугольника двумя сторонами?

2. (a) В графе для любых двух смежных вершин есть ровно одна вершина, смежная с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?
(b) В графе для любых двух смежных вершин есть две вершины, смежные с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

3. Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

4. (a) В любом дереве, отличном от точки, найдется вершина степени 1 (даже две).
(b) В любом дереве $V - E = 1$, где V – количество вершин, а E – количество ребер.
(c) В любом дереве любые две вершины соединены ровно одним несамопересекающимся путем.
(d) В любом связном графе G существует *максимальное дерево*, или *остов*, т.е. дерево, содержащее все вершины графа G. Это дерево может быть не единственно.

5. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k, $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе найдется несамопересекающийся цикл длины не меньшей, чем $k + 1$.

6. Все ребра связного графа раскрашены в 2 цвета. Из каждой вершины выходит поровну ребер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.