

## Алгебра, семинар 4-8 апреля: квадратичные и билинейные формы

1. Найдите поляризацию и сигнатуру квадратичной формы **a)**  $x_1^2 - x_2^2$  и **b)**  $x_1x_2$  на  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sum_{i<j} x_ix_j$  на **c)**  $\mathbb{R}^3$  и **d)**  $\mathbb{R}^n$ , **e)**  $\sum_{i<j} (j-i)x_ix_j$  на  $\mathbb{R}^n$ , **f)**  $Q(A) = \det A$  на  $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ , **g)**  $Q(A) = \text{tr}A^2$  на  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .
2. Найдите линейные замены, приводящие к диагональному виду квадратичные формы из прошлой задачи.
3. Может ли невырожденная квадратичная форма на двумерном вещественном пространстве иметь: **a)** ровно одно, **b)** ровно два, **c)** ровно три (ненулевых) изотропных подпространства? **d)** Тот же вопрос, если форма не предполагается невырожденной.
4. Приведите пример невырожденной квадратичной формы на четырехмерном вещественном пространстве  $V$ , имеющей **a)** только одномерные изотропные подпространства, **b)** двумерные изотропные подпространства. **c)** Какая может быть в каждом из этих случаев сигнатура формы?
5. Существует ли на  $\mathbb{R}^7$  квадратичная форма с главными угловыми минорами  
**a)**  $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 < 0, M_7 > 0$ ?  
**b)**  $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 > 0, M_7 > 0$ ?  
**c)**  $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 = 0, M_7 > 0$ ?  
Если да, то какая у нее может быть сигнатура?
6. **a)** Для положительно определенной квадратичной формы  $Q$  докажите неравенство треугольника  $\sqrt{Q(x+y)} \leq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$ . Когда достигается равенство?  
**b)** Для невырожденной формы  $Q$  с отрицательным индексом инерции 1 докажите обратное неравенство треугольника  $\sqrt{Q(x+y)} \geq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$ . Когда достигается равенство?