

Алгебра, семинар 18-22 апреля: симметрические и ортогональные операторы

Во всех задачах идет речь про стандартное евклидово пространство \mathbb{R}^n с нормой $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, если не оговорено иное.

1. Пусть L – плоскость в \mathbb{R}^3 , заданная уравнением **a)** $x+y+z=0$, **b)** $x+2y+3z=0$. Опишите изоморфизм $L \rightarrow L^*$, индуцированный стандартной евклидовой нормой. **с)** Опишите в L^* аннулятор прямой $\mathbb{R} \cdot (1, -2, 1) \subset L$. **д)** То же для евклидовой нормы $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$.
2. Диагонализируйте в ортонормированном базисе операторы **a)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, **с)** $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, **д)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **е)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Приведите к главным осям квадратики **a)** $x^2+axy+y^2=1$, **b)** $x^2+axy=1$, **с)** $xy+yz+xz=1$.
4. **a)** Приведите к канонической форме пару квадратичных форм x^2+xy+y^2 и x^2-y^2 в \mathbb{R}^2 . **b)** Приведите пример пары неположительно определенных форм, которая не приводится к канонической форме над \mathbb{R} .
5. Приведите к каноническому виду ортогональную матрицу **a)** $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$.
6. **a)** Докажите, что экспонента кососимметрического оператора $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ является поворотом на a радиан. **b)** Найдите матрицу кососимметрической билинейной формы, сопоставляющей векторам u и $v \in \mathbb{R}^3$ определитель матрицы, составленной из столбцов u, v и a . **с)** Пусть S – кососимметрический оператор, соответствующий форме из предыдущего пункта. Докажите, что вектор a сохраняется оператором $\exp(S)$. **д)** Докажите, что $\exp(S)$ – поворот на $|a|$ радиан вокруг вектора a .