

Алгебра, семинар 11-15 апреля: евклидовы пространства, ортогональность

Во всех задачах идет речь про стандартное евклидово пространство \mathbb{R}^n с нормой $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

1. Ортогонализируйте базис **a)** $(1, 1), (1, 0)$ **b)** $(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)$.
2. Дополните до ортогонального базиса векторы **a)** $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$, **b)** $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$.
3. Найдите ортогональный базис в подпространстве **a)** порожденном векторами $(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)$, **b)** $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, **c)** $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, **d)** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.
4. Задайте порождающими векторами и уравнениями ортогональные дополнения к **a)** пространствам из предыдущей задачи, **b)** линейной оболочке векторов $(1, 1, 1, 1)$ и $(1, 2, 3, 4)$.
5. Найдите оператор ортогонального проектирования на подпространства из предыдущих задач.
6. Найдите кратчайший отрезок, соединяющий прямую $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 2, 2)$ и плоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.