

В предыдущих лекциях мы видели несколько ансамблей случайных матриц и вывели плотность распределения их собств. значений.

Это функция многих переменных, чтобы понять что-то о том как выглядит распределение собственных значений нужно обладать менее детальной информацией. В частности нас будет интересовать предел матриц большого размера. Хотели бы получить большие величины должны быть пригодны для асимптотического анализа. Для этого нужны такие величины как частные распределения, корреляционные функции и т.д. Заинтересованным сейчас введением матричных  $\beta$ -ансамблей является то, что от распределения всех собственных значений можно спуститься к локальным характеристикам, таким как одно-двухточечные корреляционные ф-ии и др.

В пределе больших матриц эти величины будут характеризовать предельную форму распределения собственных значений и функции около неё.

Перейдем тем как перейти к точным вычислениям вернемся к вопросу о предельной плотности собств. значений на примере  $\beta$ -ансамблей.

Точная формула для распредел. собств. значений имеет вид:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta \sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  для гауссовского ансамбля и

$V(x) = \frac{x}{2} - \ln|x|$  для Вилера и т.д.

Заменим распределение  $\beta$  в виде  $P(\underline{\lambda}) = e^{-\beta E(\underline{\lambda})}$

$$\text{где } E(\underline{\lambda}) = \sum_i V(\lambda_i) + \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Это есть распределение Гиббса для системы

гармоничных частиц, движущихся по прямой в потенциале  $V(x)$ , взаимодействующих через гравитационный кулоновский потенциал.

$$Z = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\beta E(\underline{\lambda})} d^N \lambda \quad \text{— статистика кулоновского газа.}$$

Чтобы сделать систему конечной перемешиваем переменные,  $\lambda = \sqrt{N/2} \tilde{\lambda}$ . (Эта нормировка использована в 1-й лекции)

Тогда  $P(\underline{\lambda}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta N^2 \tilde{E}(\underline{\lambda})}$ , где  $\tilde{E}(\underline{\lambda}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{V}(\lambda_i) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \ln |\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j|$   
и  $\tilde{V}(x) = N^{-1} V(\sqrt{N/2} x)$

Предел  $N \rightarrow \infty$  соответствует случаю нулевой температуры, когда реализуется (т.е. даёт вклад в статистическое распределение) порней, при котором энергия минимальна. Задача нахождения оптимальной конфигурации порней может быть поставлена как вариационная задача для эмпирического спектрального распределения.

Пусть  $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  — э.в.м. Тогда

$$Z \approx e^{-\beta N^2 f}, \quad \text{где свободная энергия дается решением вариационной задачи}$$

$$f = \inf_{\mu: \mu(\mathbb{R})=1} E(\mu); \quad E(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x) d\mu(x) - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \ln|x-y| d\mu(x) d\mu(y)$$

$$\delta \left( E - \alpha \left( \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) - 1 \right) \right) = 0$$

Решение вариационной задачи удовлетворяет уравнению

$$\tilde{V}(x) - \int \ln|x-y| d\mu(y) - \alpha = 0 \quad \text{где } \forall x \in \text{Supp } \mu(x)$$

$$\tilde{V}'(x) - \int \frac{d\mu(y)}{x-y} = 0 \quad \left( x \in \text{Supp } \mu, \quad \alpha \text{ интерпретировать в смысле главного значения.} \right)$$

Введем преобр. Стильтерса  $s(z) = \int \frac{d\mu(y)}{y-z} \quad z \in \mathbb{C}$

Формула Коши:  $s(z+i\epsilon) + s(z-i\epsilon) = 2 \int \frac{d\mu(y)}{x-y}$

Получим задачу Римана - Гильберта где преобразование осуществляется:

$$s(x+i\varepsilon) + s(x-i\varepsilon) + 2\tilde{V}'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{Supp } \mu$$

$s$  - аналитична в  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ф-ца  $\lim_{y \rightarrow \infty} s(iy) = 1$ .

Решение где  $V(x) = \frac{x^2}{2}$ ;  $\tilde{V} = \frac{x^2}{4}$

Введем  $P(x) = 2\tilde{V}'(x) s(x) - s^2(x) =$

$$P(x+i\varepsilon) - P(x-i\varepsilon) = (\tilde{V}'(x)2 - (s(x+i\varepsilon) + s(x-i\varepsilon))) (s(x+i\varepsilon) - s(x-i\varepsilon)) = 0$$

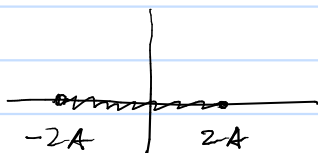
т.к. аналитична замыкается при  $x \in \text{Supp } \mu$  а функция на аналитична в  $\mathbb{C}$ , т.е.  $P(x)$  - аналитична

везде в  $\mathbb{C}$  и  $s(x) \sim \frac{P(z)}{V'(z)} \sim \frac{1}{z}$  при  $z \rightarrow i\infty$ .

Получим  $P(z)$  - многочлен степени не больше чем  $V'(z)$ , т.е.  $P(z) = Az + c$

$$A - x s(x) + s^2(x) = 0 \quad s(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4A}}{2} = \frac{x + i \sqrt{4A - x^2}}{2}$$

$$s(x) \underset{x \rightarrow i\infty}{\sim} \frac{x - x(1 - \frac{4A}{2x^2})}{2} \underset{x \rightarrow i\infty}{\sim} \frac{A}{x} \Rightarrow A = 1$$



$$\mu(dx) = f(x) dx$$

Плотность  $f(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im } s(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{x^2 - 4}$

Как и обычно выводим при получении закона Вигнера.

Перейдем к точному вычислению характеристической функции  $\rho$ -ансамблей. Рассмотрим случай  $\beta = 2$ .

Попробуем вычислить нормированный многочлен

$$Z = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^2 \prod_{i=1}^N e^{-V(\lambda_i)}$$

где  $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \det(\lambda_i^j)_{\substack{1 \leq i, j \leq N}}$

Вес  $e^{-V(\omega)}$  задает скалярное произведение в  $L_2(\mathbb{R}, e^{-V(\omega)} d\omega)$ .  $\langle f | g \rangle = \int f(\omega) g(\omega) e^{-V(\omega)} d\omega$

Обозначим  $m_i(\lambda) = \lambda^i \quad i=0, 1, 2, \dots$

$$Z = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} d^N \lambda \det(m_i(\lambda_j))_{\substack{1 \leq i, j \leq N}} \det(m_k(\lambda_s))_{\substack{1 \leq k, s \leq N}} \prod_{i=1}^N e^{-V(\lambda_i)}$$

Формула (Andreief (1883)).

$$\frac{1}{N!} \int_{\Omega^N} d^N x \det(f_i(x_j))_{\substack{1 \leq i, j \leq N}} \det(g_k(x_s))_{\substack{1 \leq k, s \leq N}} = \det\left(\int_{\Omega} g_i(x) f_j(x) dx\right)_{\substack{1 \leq i, j \leq N}}$$

Получим:  $Z = \det(\langle m_i | m_j \rangle)_{\substack{1 \leq i, j \leq N}}$

Пусть  $M_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^i \lambda^j e^{-V(\lambda)} d\lambda$

Тогда  $Z = \det M_{ij}$  — матрица Ганкеле

$$Z = \det M_{i+N-j+1} \times (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} = \text{матрица Тенниса}$$

Пусть  $p_i(\lambda), \tilde{p}_i(\lambda)$  — глаго семейства ортогональных многочленов степеней:  $p_i(\lambda) = \lambda^i + p_{i-1} \lambda^{i-1} + \dots$ ,  $\tilde{p}_i(\lambda) = \lambda^i + \tilde{p}_{i-1} \lambda^{i-1} + \dots$

Добавление к строкам матрицы группы строк с произвольными коэффициентами не меняет определителя:

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \det(P_{i-1}(\lambda_j))_{0 \leq i, j \leq N}$$

Пусть  $H_{i,j} := \langle P_{i-1}, \tilde{P}_{j-1} \rangle$ ,  $1 \leq i, j \leq N$

Тогда  $\boxed{Z = \det H_{i,j}}_{1 \leq i, j \leq N}$  — не зависит от выбора  $P_i, \tilde{P}_i$

### Корреляционные ф-ны и Ядро

Рассмотрим меру  $dP(\underline{\lambda}) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N$  на  $\mathbb{R}^N$  симметричную относительно перестановок  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$

Пусть  $A_1, \dots, A_m$  — непересекающиеся ограниченные boreлевские подмножества  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $\nu_i = \#\{k: \lambda_k \in A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

Факториальная моментная мера

$$M_k(A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}) = \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^m \frac{\nu_i!}{(\nu_i - k_i)!} \right), \quad k_1 + \dots + k_m = k$$

где  $\mathbb{E}(\cdot)$  — математическое ожидание по отношению к  $P$ .

( $\nu! / (\nu - k)!$  — число способов вынуть  $k$  частиц из  $\nu$ .)

Опр.

Пусть  $M_k$  абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега на  $A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}$ , т. е.  $M_k$  задане как

$$M_k(A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}) = \int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} R_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Тогда  $R_k$  —  $k$ -точечные корреляционные ф-я,

1) Вместо меры Лебега  $dx_1, \dots, dx_n$  можно рассмотреть любую группу референтную меру.

2) Вероятностные интерпретации:

Пусть  $[x_1, x_1 + \Delta x_1], \dots, [x_k, \dots, x_k + \Delta x_k]$  - непересекающиеся отрезки

$$R_k(x_1, \dots, x_k) = \lim_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_k \rightarrow 0} \frac{P(\text{найти частицу в } [x_1, x_1 + \Delta x_1], \dots, [x_k, x_k + \Delta x_k])}{\Delta x_1 \dots \Delta x_k}$$

Если вместо  $R$  задано множество  $\mathbb{Z}$  (например  $\mathbb{Z}$ ) то  $R_k(x_1, \dots, x_k)$  - вероятность найти частицы в  $(x_1, \dots, x_k)$ .

В частности агностическая ф-ия  $R_1(x)$  - средняя плотность частиц в точке  $x$

$$E(V(A)) = \int_A R_1(x) dx$$

3) Симметрия относительно перестановок

$$R_k(x_1, \dots, x_k) = R_k(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_k}) \quad \sigma \in S_k$$

Свойства.

1. Лемма. Пусть  $P$  - абсолютно непрерывна и симметрична  $dP(x_1, \dots, x_n) = dP(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) = P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ .

Тогда 
$$R_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int dx_{k+1} \dots dx_N P(x_1, \dots, x_N)$$

Доказ-во:  $R_k(x_1, \dots, x_k)$  - вероятность найти любые  $k$  совет в значениях из  $x_1, \dots, x_k$  в точках  $x_1, \dots, x_k$ .

Один вариант  $x_1 = x_1, \dots, x_k = x_k$ . Любая группа упорядоченная выборка  $x_{\sigma_1} = x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_k} = x_{\sigma_k}$  имеет ту же вероятность. Всего таких выборок  $A^k = N! / (N-k)!$

Групповые ф-ии:  $T_2 = R_1(x_1) R_1(x_2) - R_2(x_1, x_2)$

$$T_3 = 2R_1(x_1) R_1(x_2) R_1(x_3) - R_1(x_1) R_2(x_2, x_3) - R_2(x_1, x_2) R_1(x_3) - R_1(x_2) R_2(x_1, x_3) + R_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-m} (m-1)! R_{S_1} \dots R_{S_m} \quad \begin{matrix} S_i \cap S_j = \emptyset \\ S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m = \{1, \dots, n\} \end{matrix}$$

Обратно:  $R_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_m \sum_S (-1)^{h(S)} T_{S_1} \dots T_{S_m}$

Пусть  $A(z_1, z_2, \dots)$  - формальный ряд по  $z_1, \dots, z_n$   
и  $A_S$  - коэфф. при  $z_{i_1} \dots z_{i_k}$  при  $S = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$   $A_\emptyset = 1$

и  $B(z) = -\ln(1+A)$ . Тогда  $T_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) (-1)^k$  - коэфф.  
при  $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ .

Док-во: Пусть  $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m f_m$

$[z_{i_1} \dots z_{i_k}] f(A(z)) = \sum_{m \supseteq S_1 \cup \dots \cup S_m} m! f_m A_{S_1} \dots A_{S_m}$ , где  $S_1 \cup \dots \cup S_m = \{i_1, \dots, i_k\}$   
 $S_i \cap S_j = \emptyset$

Возьмем  $f(z) = -\ln(1+z)$   $f_m = \frac{(-1)^m}{m}$

$(-1)^h F_n(x_1, \dots, x_n) = \sum (m+1)! R_{S_1} \dots R_{S_m} (-1)^m$

Обратно  $g(z) = f^{-1}(z) = e^{-z} - 1$   $g_m(z) = \frac{(-1)^m}{m!}$

$R_n(x_1, \dots, x_n) = \sum (-1)^{h(S)} T_{S_1} \dots T_{S_m} \quad \square$

Начнем вычислять коэф. функции в  $N$ -точечном

При  $k=N$  имеем □

$R_N(x_1, \dots, x_N) = N! P(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{z} \Delta^2(x_1, \dots, x_N) \prod e^{-V(x_i)}$

$= \det H^{-1} \det P_{m-1}(x_n) \det \tilde{P}_{k-1}(x_n) \prod e^{-V(x_i)}$

$= \det \sum_{i,j} P_i(x_n) H_{ij}^{-1} \tilde{P}_j(x_m) e^{-\frac{V(x_n)}{z}} e^{-\frac{V(x_m)}{z}}$

$= \det K(x_n, x_m)$

$1 \leq n, m \leq N$



$$K(x, y) = \sum_{i, j} p_{i-1}^{-1} H_{i, j}^{-1} \tilde{p}_{j-1}(y) e^{-\frac{V(x)}{2}} e^{-\frac{V(y)}{2}}$$

## Свойства ядра

1)  $K(x, y)$  не зависит от выбора  $p$  и  $\tilde{p}$

$$2) \boxed{N = \int K(x, x)} = \sum_{i, j} \langle p_{i-1} | \tilde{p}_{j-1} \rangle H_{i, j}^{-1} = \sum_{i, j} H_{i, i}^{-1} H_{i, i}^{-1} = \text{Tr} J_{N=N}$$

3)  $K * K = K$ : - самопроизвольное ядро (проектор)

$$\int K(x, y) K(y, z) dy = K(x, z)$$

## Теорема: (Дайсон)

$$\int \det(K(x_i, x_j)) dx_k = (N - k + 1) \det(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k-1}$$

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^k K(x_i, x_{\sigma_i}) dx_k = \sum_{\sigma \in S_{k-1}} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{k-1} K(x_i, x_{\sigma_i}) \int K(x_k, x_k) dx_k$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_k: \sigma_k \neq k} (-1)^\sigma K(x_k, x_{i_1}) K(x_{i_1}, x_{i_2}) \dots K(x_{i_s}, x_k) \prod_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_s, k\}} K(\dots)$$

$K(x_{i_1}, x_{i_s}) - 1$  цикл сокращается на единицу.

$$\Rightarrow N \det K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq k} - (k-1) \det K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq k-1}$$

В первое слагаемое вошли перестановки, не затрагивающие  $x_k$ . Во втором слагаемом  $x_k$  входит в один из циклов. В этом случае интегрирование сокращает длину цикла на 1. Поэтому полученная перестановка отличается знаком. Обратно, чтобы получить перестановку  $k$  элементов из перестановки  $(k-1)$  элементов можно вставить  $x_k$  в любой цикл



между соседних парой  $x_i, x_j$  на уровне  $w_j(k-1)$  горизонтальных мест.

Среднее:

$$R_k(x_1, \dots, x_k) = \det (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}$$

$$\text{Расчет среднего луга } \mathbb{E} \left( \prod_i (1 + f(x_i)) \right) =$$

$$= \frac{\det H^{-1}}{n!} \int \det P_{i-1}(x_j) \det (\tilde{P}_{k-1}(x_s)) \prod_i (1 + f(x_i)) \prod_i e^{-V(x_i)} dx_i$$

$$= \frac{1}{\det H} \det \left( \langle P_{i-1} | \tilde{P}_{k-1} (1+f) \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\det H} \det \left( H_{i,j} + \langle P_{i-1} | \tilde{P}_{k-1} f \rangle \right) =$$

$$= \det \left( \delta_{i,j} + \sum_k H_{i,k}^{-1} \langle P_{k-1} | \tilde{P}_{j-1} f \rangle \right) \textcircled{=}$$

$$A_{i,j} = \sum_k H_{i,k}^{-1} P_{k-1}(x) \quad B_{x_j} = \tilde{P}_{j-1}(x) f(x) \quad AB = \int A_{i,x} B_{x_j} e^{-V} dx$$

$$\textcircled{=} \det (1 + AB) = \det (1 + BA) \quad BA = \sum_i B_{x_i} A_{i,y}$$

$$BA = \sum_{i,k} \tilde{P}_{i-1}(x) f(x) H_{i,k}^{-1} P_{k-1}(y) = f(x) K(y, x)$$

$$\mathbb{E} \left( \prod_i (1 + f(x_i)) \right) = \det (1 + K f)$$

какие случаи: 1)  $f(x) = \sum_{r=1}^k \delta(x - y_r) z_r$

$$E\left(\prod_i \delta(x_i - y_r) z_r\right) = \det\left[I + K \sum_r (x - y_r) z_r\right] = \det\left(\delta_{r,s} + K(y_s, y_r) z_r\right)$$

коэф при  $z_1 \dots z_r$  равен  $\det K(y_r, y_s) = R_n(y_1 \dots y_n)$

$$\begin{aligned} T_n(-1)^n &= [z_1 \dots z_r] \left( \ln \det(\delta_{r,s} + K(y_s, y_r) z_r) \right) = \\ &= \text{Tr} \ln(1 + K(y_s, y_r) z_r) = - \sum \frac{(-1)^{m-1}}{m} \text{Tr} (K_{r,s} z_s)^m \end{aligned}$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in S_n} K(y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}) K(y_{\sigma_2}, y_{\sigma_3}) \dots K(y_{\sigma_n}, y_{\sigma_1})$$

где  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$   $T_2(x, y) = |K(x, y)|^2$

Вероятность образования цикла:  $f_2 = \mathbb{1}_{x \in J}$

$$E(0, J) := P(\text{нет цикла в } J) = \det(1 - K \mathbb{1}_J)$$

Плотность вероятности для двух соседних с.з. быть в точках  $a$  и  $b$ :

$$P(x_i = a, x_{i+1} = b) = - \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} E(0, a)$$

В общем случае  $E(n_1, \dots, n_k | J_1, \dots, J_k)$  - вероятность

$n_1$  с.з. в  $J_1$ ,  $n_2$  в  $J_2$  и т.д.

$$\begin{aligned} E(n_1, \dots, n_k | J_1, \dots, J_k) &= \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \frac{\partial^{\sum n_i}}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \partial \lambda_k^{n_k}} E\left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{J_i}(x_j)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \frac{\partial^{\sum n_i}}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \partial \lambda_k^{n_k}} \left( \det \left(1 + K_{ij} \sum \lambda_i \mathbb{1}_{J_i}\right) \right) \end{aligned}$$

Пример. Круговой ансамбль.

$$\prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 = \prod_{i < j} (e^{-i\theta_i} - e^{-i\theta_j}) (e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}) =$$

$$= \det(e^{i j \theta_k}) \prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 0 \leq j \leq N-1}} e^{\frac{j(N-1)\theta_k}{2}} \prod_{1 \leq k \leq N} e^{i \frac{N-1}{2} \theta_k} \det(e^{-i j \theta_k}) =$$

$$S_0 = \frac{N-1}{2} + i$$

$$= \det(e^{i \theta_k S_j}) \det(e^{-i \theta_k S_j})$$

Построим ядро:  $K_N = \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x) H_{ij}^{-1} \tilde{p}_j(y)$

$$H_{ij} = \langle p_i | \tilde{p}_j \rangle \quad \text{Возьмем } p_i(\theta) = e^{i \theta S_i} \quad \tilde{p}_i(\theta) = e^{-i \theta S_i}$$

$$H_{ij} = \langle p_i | \tilde{p}_j \rangle = \int e^{i \theta (S_i - S_j)} d\theta = 2\pi \delta_{ij} \Rightarrow H_{ij}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \delta_{ij}$$

$$K_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(x-y) S_k} = \frac{1}{2\pi} \left( e^{i(x-y) \frac{(1-N)}{2}} + e^{i(x-y) \frac{3-N}{2}} + \dots \right)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} e^{i(x-y) \frac{1-N}{2}} \left( \frac{1 - e^{i(x-y)N}}{1 - e^{i(x-y)}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{(x-y)N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

1)  $K(x, x) = \lim_{y \rightarrow x} K(x, y) = \frac{N}{2\pi}$  - плотность.

2) Перейдем к пределу  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{xN}{2\pi} = z$ ,  $\frac{yN}{2\pi} = \varphi$

$$K_{\delta\hbar}(z, \varphi) = \frac{2\hbar}{N} K\left(\frac{2\hbar z}{N}, \frac{2\hbar \varphi}{N}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi(\varphi - z))}{\varphi - z}$$

3) Групповая функция  $\Phi$ -матрицы  $T_2 = |K(x, y)|^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi r}{r^2}$

