Вычислимость и логика 2016. Листок 1
Срок сдачи 20 апреля

Обязательные задачи
За решение задачи 10 дается 3 балла, задачи 7 - 2 балла, за остальные задачи — по 1 баллу.

Во всех задачах, кроме 1, 7, 8, рассматриваются теории с равенством и нормальные модели.

1. Докажите выводимость следующих формул в исчислении предикатов:
   а. $(\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta) \leftrightarrow \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$
   б. $(\exists x\ \alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$ (если x не входит свободно в β)
2. Докажите, что в конечной сигнатуре, состоящей из одноместных предикатных символов и равенства, всякая теория имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных моделей.
3. Докажите, что теория в сигнатуре с одним 2-местным предикатным символом R, равенством и двумя аксиомами:
   $\forall x\ \forall y\ (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$ (симметричность)
   $\forall x\ R(x,x)$ (рефлексивность)
   имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.
4. Для сигнатуры с одним предикатным символом $\leq$ и равенством рассмотрим модель $M = (P(\mathbf{N}), \subset)$ (т. е. носитель состоит из всех подмножеств **N**, а $\leq$ интерпретируется как включение). Докажите, что в M:
   а) множество $\{\{0\}\}$ не определимо.
   б) множество $\{\{0\},\{1\},\{2\},...\}$ определимо.
5. Рассмотрим сигнатуру колец $(0, 1, +, \bullet, =)$.
   (а) Докажите, что теория полей характеристики 0 в этой сигнатуре не является конечно аксиоматизируемой.
   (б) Докажите, что эта теория неполна.

Дополнительные задачи

6. Рассмотрим сигнатуру абелевых групп $(0, +, =)$.
   Докажите, что в этой сигнатуре $\mathbf{Z} \not\equiv \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ **.**
7. Постройте формулу в сигнатуре без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.
8. Докажите выводимость следующих формул в исчислении предикатов:
   а. $(\forall x\ \alpha \vee \beta) \leftrightarrow \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ (если x не входит свободно в β)
   б. $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \beta)$
   в. $\exists x \forall y\ (P(x) \rightarrow P(y))$ (P - предикатный символ)

9. Используем сокращения:

   $\exists! x\ \alpha(x) := \exists x\ (\alpha(x)\ \wedge \forall y\ (\alpha(y) \to y = x)$ (где y не входит в $\alpha(x)$),

   $\exists_{=n} x\ \alpha(x) :=$

   $\exists x_1 \ldots \exists x_n(\alpha(x_1)\ \wedge \ldots\ \alpha(x_n)\ \wedge \bigwedge\{\neg\,(x_i = x_j)\mid i< j\} \wedge \forall y\ (\alpha(y) \to (y = x_1 \vee \ldots\ y = x_n\ ))$

   (где $x_1, \ldots, x_n, y$ — различные переменные, не входящие в $\alpha(x)$).

   Общезначима ли следующая формула:

   $\exists! x\ \alpha(x) \wedge \exists! x\ \beta(x)\ \to \exists x\ (\alpha(x) \wedge \beta(x)) \vee \exists_{=2} x\ (\alpha(x) \vee \beta(x))$?

10. («Проективная геометрия»). Докажите, что теория в сигнатуре $(R^2, =)$ со следующими аксиомами сильно категорична:

    (1) $\forall x\ (\exists y\ R(y,x) \to \exists_{=3} y\ R(y,x))$,

    (2) $\forall x\ (\exists y\ R(x,y) \to \exists_{=3} y\ R(x,y))$,

    (3) $\forall x\ \forall y\ (x = y \vee \exists z\ R(z,x)\ \vee \exists z\ R(z,y) \vee \exists! z\ (R(x,z) \wedge R(y,z)))$,

    (4) $\forall x\ \forall y\ (x = y \vee \exists z\ R(x,z)\ \vee \exists z\ R(y,z) \vee \exists! z\ (R(z,x) \wedge R(z,y)))$,

    (5) $\forall x\ (\exists y\ R(x,y) \leftrightarrow \neg\ \exists y\ R(y,x))$.