Листок 13. Интегралы, зависящие от параметра

Анализ, 1 курс, **01.05.2016**

13◇1 Вычислите пределы: **а)** $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}dx$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-n\sin x}dx$.

13◇2 Пусть $f\in C[a,b]$, $F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$. Докажите, что $F^{(n)}(x)=f(x)$ на $[a,b]$.

13◇3 Вычислите интегралы (применив дифференцирование по параметру)

а) $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$;

б) $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$, $|\alpha|<1$.

13◇4 Пусть $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2}e^{-y^2/x}$ при $x>0$ и $f(x,y)=0$ при $x=0$. Убедитесь, что равенство $\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 f'_y(x,y)dy$ выполнено не для всех $y\in[0,1]$. Какие условия теоремы о дифференцировании интеграла по параметру здесь нарушаются?

Γ и B-функции

13◇5 Исследуйте интегралы на равномерную по α сходимость на указанных множествах:

а) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+(x-\alpha)^4}$ при $\alpha\in(-\infty,0]$ и при $\alpha\in[0,+\infty)$;

б) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{x}}dx$ при $\alpha\in[1,+\infty)$ и при $\alpha\in[0,+\infty)$.

13◇6 **а)** Докажите, что $\frac{1}{x^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-xy}dy$ при $s>0$, $x>0$.

б) Докажите, что $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x^\alpha}dx=\frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}$ при $0<\alpha<1$, $a>0$.

в) Докажите, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(bx)}{x^\beta}dx=\frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin(\pi\beta/2)}$ при $0<\beta<2$, $b>0$.

Указание: для решения (б) и (в) пригодится (а).

г) Вычислите *интегралы Френеля* $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$ и $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$.

13◇7 **а)** Докажите, что $(\ln\Gamma(x))''=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ для всех $x>0$.

б) Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

13◇8 Выразите длину эллипса $2x^2+y^2=1$ через значения B-функции.