Алгебра, листок 8: модули, решетки, нормальные формы

1. **a)** Опишите все рациональные делители степени 2 многочлена x^d-1 при $d\leqslant 6$. **b)** Классифицируйте линейные операторы порядка не выше 6 на $\mathbb{Q}^2$ (перечислив их фробениусовы нормальные формы). **c)** Докажите, что ни при каком d многочлен x^d-1 не имеет рациональных делителей степени 2, кроме перечисленных в пункте (a). Подсказка: используйте лемму Гаусса. **d)** Докажите, что все линейные операторы конечного порядка на $\mathbb{Q}^2$ перечислены в пункте (б). **e)** Классифицируйте линейные операторы конечного порядка на $\mathbb{Q}^3$.

Определение. Многочлен $\Phi_n(x)=\prod\limits_{\substack{k=1,2,\ldots,n-1\\(k,n)=1}}(x-e^{2\pi ik/n})$ называется циклотомическим.

2. **a)** Докажите, что $x^d-1=\prod\limits_{n|d}\Phi_n(x)$. **b)** Докажите, что $\Phi_n\in\mathbb{Q}[x]$.

Теорема Гаусса. Циклотомические многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$.

3. **a)** Опишите все рациональные делители степени 4 многочлена x^d-1. **b)** Найдите число классов сопряженности линейных операторов на $\mathbb{Q}^4$ конечного порядка.

4. **a)** Если хотя бы одна из матриц A и B невырождена, то AB и BA имеют одинаковую фробениусову нормальную форму. **b)** Без предположения невырожденности это неверно.

5. **a)** Пусть L – нетривиальное рациональное подпространство евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартной нормой, и $L^\perp$ – его ортогональное дополнение. Докажите, что евклидовы объемы фундаментальных параллелепипедов решеток $\mathbb{Z}L=\mathbb{Z}^n\cap L$ и $\mathbb{Z}L^\perp=\mathbb{Z}^n\cap L^\perp$ совпадают.
b) Для рациональных L и $M\subset\mathbb{R}^n$ дополнительных размерностей $\left|\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}L+\mathbb{Z}M}\right|=\left|\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}L^\perp+\mathbb{Z}M^\perp}\right|$.
c)$^\times$ Обязательно ли в условиях предыдущего пункта изоморфны группы $\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}L+\mathbb{Z}M}$ и $\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}L^\perp+\mathbb{Z}M^\perp}$?

6. Над произвольным не-полем приведите пример несвободного фактора свободного модуля.

7. Докажите, что утверждение “*Подмодуль конечно порожденного модуля конечно порожден*” **a)** верно для модулей над к.г.и., **b)** но неверно над произвольным кольцом.

8. То же для следующих утверждений о конечно порожденных модулях: **a)** “*модуль без кручения свободен*” и **b)** “$A\oplus C\simeq B\oplus C\Rightarrow A\simeq B$”.

9. Является ли модуль $\mathbb{C}[x,y]/f$ над кольцом $\mathbb{C}[x]$ конечно порожденным и/или свободным, если $f(x,y)$ имеет вид **a)** x^2-y^2, **b)** $x-y^2$, **c)** $xy-1$, **d)** x^2+y^2-1? **e)**$^\times$ Проекция кривой $f=0$ на ось Ox вдоль оси Oy собственная $\Leftrightarrow$ у многочлена f моном максимальной степени по y единственен и не зависит от x $\Leftrightarrow$ модуль $\mathbb{C}[x,y]/f$ над $\mathbb{C}[x]$ конечно порожден.
f) Для каких f из пунктов (a–d) поле частных кольца $\mathbb{C}[x,y]/f$ изоморфно полю $\mathbb{C}(x)$?

Определение. Оператор на пространстве V называется полупростым, если V разлагается в прямую сумму его инвариантных подпространств, минимальных по включению.

10. **a)** Разложение Жордана–Шевалле: Над алгебраически замкнутым полем каждый оператор единственным образом разлагается в сумму коммутирующих полупростого и нильпотентного. **b)** Обобщите пункт (a) на операторы над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$.
c)$^\times$ Полупростая и нильпотентная части оператора являются многочленами от него.

11. Докажите равносильность следующих свойств оператора F: каждое собственное подпространство одномерно; все жордановы клетки имеют разные собственные значения; минимальный многочлен равен характеристическому; фробениусова форма состоит из одного блока; каждый коммутирующий с F оператор представляется как многочлен от F.

12. Покажите, что любой оператор, коммутирующий со всеми операторами, коммутирующими с комплексным линейным оператором F, является многочленом от F.

13. Любая ли комплексная матрица является пределом диагонализуемых?

14. Весовая фильтрация: для каждого нильпотентного оператора $N:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ существует единственная фильтрация $0=W_{-m}\subset W_{-m+1}\subset\ldots\subset W_{m-1}\subset W_m=\mathbb{C}^n$, такая что $N(W_k)\subset W_{k-2}$, и $N^k:W_k/W_{k-1}\to W_{-k}/W_{-k-1}$ – изоморфизм при каждом k.