Дискретная математика и приложения
Семинар 4

ВШЭ, факультет математики
первый курс

Последовательность многочленов $p_n(x)$, $n \geq 0$, назыается биномиальной, если $p_0(x) = 1$, степень $p_n(x)$ равна n, старший коэффициент всех многочленов равен 1 и $p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)$.

1. Докажите, что последовательность $p_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$ является биномиальной.

Определим линейный оператор Δ на пространстве многочленов по формуле $\Delta p_n = n p_{n-1}$. Оператор Δ называется дельта-оператором последовательности $p_n(x)$.

2. Выпишите явно дельта-операторы последовательностей $p_n(x) = x^n$ и $p_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

3. Докажите, что дельта-операторы из предыдущей задачи коммутируют с операторами сдвига δ_a, где $(\delta_a f)(x) = f(x+a)$.

4. Докажите, что дельта-оператор последовательности $p_n(x)$ коммутирует с операторами сдвига тогда и только тогда, когда $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – биномиальна.

5. Пусть $A_n(x) = x(x+n)^{n-1}$ – многочлены Абеля. Докажите, что $\frac{d}{dx} A_n(x) = n \delta_1 A_{n-1}(x)$.

6. Вычислите дельта-оператор последовательности многочленов Абеля и докажите её биномиальность.

7. Докажите, что $p_n(0) = 0$ при $n > 0$ для любой биномиальной последовательности.

8. Используя биномиальность последовательности Абеля, докажите тождество Абеля:

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{\substack{k+m=n \\ k,m \geq 1}} \binom{n}{k} k^{k-1} m^{m-1}$$

Подсказка: сравните коэффициенты при xy в левой и правой частях условия биномиальности.