

Задачи для подготовки к контрольной по группам и алгебрам Ли.

Контрольная будет 16 мая в 15:30. Задачи будут похожи на некоторые из приведенных ниже.

1. Разложите в прямую сумму неразложимых объектов категории $\mathcal{O}(sl_2)$ тензорное произведение следующих объектов: **а)** $M_{\frac{5}{6}} \otimes V_6$; **б)** $M_{\frac{5}{6}} \otimes M_6^\vee$; **в)** $M_{\frac{5}{6}} \otimes M_1$; **г)** $M_{-5} \otimes V_6$.
2. Докажите, что элемент $A \in U(gl_n)$ централен и найдите его собственное значение на модуле Верма M_λ , если **а)** $A = \sum_{i,j} e_{ij}e_{ji}$; **б)** $A = \sum_{i,j,k} e_{ij}e_{jk}e_{ki}$; **в)** $A = \sum_{i,j} (e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ji})$.
3. Найдите характер неприводимого sl_3 -модуля со старшим весом **а)** $(-5, 1, 4)$; **б)** $(0, -4, 4)$; **в)** $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -4)$; **г)** $(2, 0, -2)$.
4. Найдите кратность веса $(0, 0, 0)$ в конечномерном неприводимом sl_3 -модуле со старшим весом **а)** $(3, 0, -3)$; **б)** $(2, 2, -4)$; **в)** $(3, 2, -5)$.
5. Алгебра \mathfrak{sl}_3 действует векторными полями на \mathbb{CP}^2 . Выпишите в координатах на какой-нибудь аффинной карте дифференциальные операторы **а)** e_{12} и e_{21} ; **б)** $e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12} - 2e_{11}e_{22}$; **в)** элемент Казимира $C \in U(\mathfrak{sl}_3)$. Те же вопросы для пространства флагов в \mathbb{C}^3 и координат на открытой клетке в нем.
6. Покажите, что следующий \mathfrak{sl}_3 -модуль лежит в категории \mathcal{O} и разложите его в прямую сумму неразложимых \mathfrak{sl}_3 -модулей: **а)** $U(\mathfrak{sl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} (\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{b}_+)$; **б)** $U(\mathfrak{sl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \Lambda^2(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{b}_+)$; **в)** $U(\mathfrak{sl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \Lambda^3(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{b}_+)$.
7. Найдите все подмодули в следующем sl_3 -модуле: **а)** полиномиальные функции на аффинной карте в \mathbb{CP}^2 ; **б)** распределения, сосредоточенные на бесконечно удаленной прямой в \mathbb{CP}^2 ; **в)** распределения, сосредоточенные в точке $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{CP}^2$.