Задачи по группам и алгебрам Ли, семестр 2, листок 4. Резольвента БГГ.

Для получения оценки “10” по данному листку надо сдать 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Следующий листок будет выдан в середине апреля.

В этом листке $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Все обозначения предыдущего листка сохраняются.

Пусть $V = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} V_n$ – градуированное векторное пространство, такое, что все V_n конечномерны. *Рядом Пуанкаре* пространства V называется формальный степенной ряд $P_V(t) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dim V_n$. Рядом Пуанкаре фильтрованного векторного пространства называется ряд Пуанкаре его присоединенного градуированного пространства.

1. а) Докажите, что для любой точной последовательности $0 \to U \to V \to W \to 0$ градуированных векторных пространств выполнено $P_V(t) = P_U(t) + P_W(t)$. **б)** Верно ли это для фильтрованных векторных пространств? **в)** А что верно?

2. а) Вычислите ряд Пуанкаре универсальной обертывающей алгебры N-мерной алгебры Ли. **б)** Пусть $P(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ – ряд Пуанкаре какого-нибудь главного левого идеала в этой универсальной обертывающей алгебре. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n N!}{n^{N-1}} = 1$. **в)** Покажите, что любые два ненулевых левых идеала в этой универсальной обертывающей алгебре имеют ненулевое пересечение.

3. а) Докажите, что всякий подмодуль модуля Верма M_λ имеет ненулевое пересечение с каким-нибудь из весовых подпространств $M_\lambda(\mu)$, где $\mu \in S_n \cdot \lambda$. **б)** Докажите, что в модуле Верма есть наименьший (по включению) ненулевой подмодуль. **в)** Докажите, что этот наименьший подмодуль является неприводимым модулем Верма.

4. а) Докажите, что всякий подмодуль в модуле Верма M_λ, порожденный особым вектором, является модулем Верма (и, таким образом, всякий гомоморфизм между модулями Верма – вложение). **б)** Докажите, что $\dim \operatorname{Hom}(M_\mu, M_\lambda) \le 1$. *Указание:* пусть есть 2 разных гомоморфизма, тогда в M_λ имеются 2 подмодуля Верма со старшим весом μ. Наименьший подмодуль в M_λ лежит в каждом из них и является образом наименьшего подмодуля в M_μ при каждом из гомоморфизмов, а следовательно некоторая линейная комбинация данных гомоморфизмов аннулирует наименьший подмодуль в M_μ. Это противоречит пункту б).

5. а) Пусть $s \in S_n$ – элементарная транспозиция и $s \cdot \lambda \le \lambda$ относительно частичного порядка на весах. Докажите, что $M_{s\cdot\lambda} \subset M_\lambda$. **б)** Пусть λ – доминантный целочисленный вес (т.е. $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$). Докажите, что для любого $\sigma \in S_n$ имеется (по предыдущей задаче единственный) подмодуль $M_{\sigma\cdot\lambda} \subset M_\lambda$.

Числом беспорядков или *длиной* перестановки $\sigma \in S_n$ называется число $\ell(\sigma)$, равное количеству пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$. Эквивалентное определение: $\ell(\sigma)$ есть минимальная длина выражения σ в виде произведения элементарных транспозиций. Частичный порядок (Брюа) на группе S_n определяется следующим образом: $\sigma < \tau$, если существует такое минимальное разложение τ в произведение элементарных транспозиций, $\tau = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$, что $\sigma = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ для некоторых $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$.

6. а) Докажите, что $\sigma < \tau$ тогда и только тогда, когда существуют такие (не обязательно элементарные) транспозиции $w_1, \ldots, w_r$, что $\tau = w_1 \cdot \ldots \cdot w_r \sigma$ и $\ell(w_i \cdot \ldots \cdot w_r \sigma) > \ell(w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_r \sigma)$ для всех $i = 1, \ldots, r-1$. **б)** Докажите, что порядок Брюа действительно является частичным порядком.

7. а) Пусть $a \in \mathfrak{n}_-$ и $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Докажите, что для любого $B \in U(\mathfrak{n}_-)$ существует $l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ такое, что $a^l B \in U(\mathfrak{n}_-) a^k$. *Указание:* оператор $\operatorname{ad} a : U(\mathfrak{n}_-) \to U(\mathfrak{n}_-)$ нильпотентен. **б)** Пусть $M_\mu \subset M_\lambda$ и $s \in S_n$ – такая элементарная транспозиция, что $s \cdot \lambda \le \lambda$ и $s \cdot \mu \le \mu$ относительно частичного порядка на весах. Докажите, что имеется вложение $M_{s\cdot\mu}\subset M_{s\cdot\lambda}$. **в*)** Докажите, что для доминантного целочисленного λ имеют место вложения $M_{\tau\cdot\lambda}\subset M_{\sigma\cdot\lambda}\subset M_\lambda$ для всяких $\sigma\le\tau\in S_n$. **г*)** Пусть λ – такой вес, что для некоторой (не обязательно элементарной) транспозиции $s\in S_n$ выполнено $s\cdot\lambda<\lambda$. Докажите, что имеется вложение $M_{s\cdot\lambda}\subset M_\lambda$. *Указание:* согласно предыдущему пункту, это так для целочисленных λ, а условие наличия особого вектора в данном весовом пространстве полиномиально по λ.

8*. а) Пользуясь предыдущей задачей, постройте для всякого доминантного целочисленного λ комплекс

$$0\to C_{\frac{n(n-1)}{2}}\to\ldots\to C_1\to C_0\to 0,\ \text{где } C_i=\bigoplus_{\sigma\in S_n,\ell(\sigma)=i} M_{\sigma\cdot\lambda}.$$

б) Докажите, что нулевые гомологии этого комплекса – это неприводимый модуль V_λ. Построенный комплекс называется *резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда* модуля V_λ и, в самом деле, не имеет других гомологий. Это будет доказано в серии следующих задач.

Пусть $B\subset G=GL_n$ – подгруппа (нестрого) верхнетреугольных матриц (касательная алгебра Ли этой группы есть $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}_+$). *Пространством флагов* называется однородное пространство $F=G/B$.

9. а) Докажите, что матрицы вида $g=n_+hn_-$, где $n_+\in N_+, h\in T, n_-\in N_-$ образуют открытое подмножество в группе $G=GL_n$ и разложение $g=n_+hn_-$ для таких матриц однозначно. **б)** Докажите, что в пространстве флагов $F=G/B$ имеется открытое подмножество, инвариантное относительно B и изоморфное N_+. Это подмножество называется открытой (или старшей) *клеткой Шуберта.*

10. а) Для $G=GL_3$ выпишите явно действие алгебры Ли $\mathfrak{n}_+$ полями скоростей действия N_+ на открытой клетке в F в каких-нибудь координатах на N_+. **б)** Тот же вопрос для действия подалгебры $\mathfrak{h}$ полями скоростей. **в*)** Тот же вопрос для подалгебры $\mathfrak{n}_-$.

11. а) Докажите, что $\mathfrak{g}$-модуль $\mathbb{C}[N_+]$ лежит в категории $\mathcal{O}$, найдите его старший вес и характер. **б*)** Докажите, что этот модуль изоморфен $M_0^\vee$. *Указание:* надо показать, что этот модуль косвободен относительно $U(\mathfrak{n}_+)$, т.е. что его контрагредиентно двойственный свободен как $U(\mathfrak{n}_-)$-модуль.

12*. а) Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\Omega^k(N_+)$ k-форм на старшей клетке в пространстве флагов лежит в категории $\mathcal{O}$, и найдите его характер. **б)** Покажите, что $\mathfrak{g}$-модуль $\Omega^k(N_+)$ имеет фильтрацию, присоединенные градуированные факторы которой являются контрагредиентными модулями Верма. *Указание:* покажите, что контрагредиентно двойственный модуль индуцирован с $\mathfrak{b}$-модуля $\Lambda^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$, а последний имеет фильтрацию $\mathfrak{b}$-модулями с одномерными факторами.

13. а) Докажите, что комплекс де Рама $\Omega^\bullet(N_+)$ является резольвентой тривиального $\mathfrak{g}$-модуля. **б)** Докажите, что проекция этого комплекса в категорию $\mathcal{O}_0$ тоже является резольвентой тривиального модуля. **в*)** Покажите, что комплекс контрагредиентно двойственных модулей есть резольвента тривиального модуля, члены которой имеют такие же характеры, как и модули C_i из задачи 8 для $\lambda=0$. **г*)** Докажите по индукции, что построенная резольвента изоморфна комплексу из задачи 8 (и, таким образом, резольвента БГГ действительно является резольвентой в случае тривиального модуля).

14*. а) Обобщите результаты задачи 12 на комплекс $\mathfrak{g}$-модулей $V_\lambda\otimes\Omega^\bullet(N_+)$. **б)** Обобщите результаты задачи 13 на этот комплекс модулей и докажите, что резольвента БГГ в самом деле является резольвентой для любого доминантного целочисленного λ.